

А. С. МИЩЕНКО

ВЕКТОРНЫЕ
РАССЛОЕНИЯ
И ИХ
ПРИМЕНЕНИЯ



А.С. МИЩЕНКО

**ВЕКТОРНЫЕ
РАССЛОЕНИЯ
И ИХ
ПРИМЕНЕНИЯ**



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1984

22.15

М 71

УДК 513.83

Мищенко А.С. Векторные расслоения и их применения. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 208 с.

Книга посвящена систематическому изложению теории векторных расслоений и их приложениям к различным задачам топологии и геометрии, дифференциальных уравнений и функционального анализа. В отличие от имеющихся монографий по расслоениям главное внимание уделено основным геометрическим конструкциям и способам их применения в различных математических задачах.

Для специалистов, применяющих геометрические методы в прикладных задачах; она доступна также студентам и аспирантам математических специальностей. Может служить основой для спецкурсов и спецсеминаров.

АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ МИЩЕНКО

**ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

Редактор *В.В. Донченко*

Технический редактор *В.В. Лебедева*

Корректоры *Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 11910

Сдано в набор 16.04.84. Подписано к печати 28.06.84

Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1

Гарнитура Универс. Печать офсетная

Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 13,0. Уч.-изд. л. 15,18

Тираж 7000 экз. Тип. зак. 264. Цена 1 р. 90 к.

Издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"

630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25

М 1702040000-123 24-84
053 (02) -84

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

Предисловие	5
Глава 1	
Введение в теорию локально тривиальных расслоений	7
§ 1. Локально тривиальные расслоения	7
§ 2. Структурные группы локально тривиальных расслоений	12
§ 3. Векторные расслоения	19
§ 4. Линейные преобразования расслоений	28
§ 5. Векторные расслоения, связанные с многообразиями	34
§ 6. Линейные группы и связанные с ними расслоения	46
Глава 2	
Гомотопические инварианты векторных расслоений	51
§ 1. Классификационные теоремы	51
§ 2. Точная гомотопическая последовательность	53
§ 3. Конструкции классифицирующих пространств	59
§ 4. Характеристические классы	66
§ 5. Геометрическая интерпретация некоторых характеристических классов	77
§ 6. K -теория и характер Черна	81
Глава 3	
Геометрические конструкции с расслоениями	89
§ 1. Разностная конструкция	89
§ 2. Периодичность Ботта	99
§ 3. Периодическая K -теория	104
§ 4. Линейные представления и расслоения	107
§ 5. Эквивариантные расслоения	111
§ 6. Связь между комплексными, симплектическими и вещественными расслоениями	114
Глава 4	
Вычислительные методы в K -теории	129
§ 1. Спектральная последовательность	129
§ 2. Операции в K -теории	138
§ 3. Изоморфизм Тома и прямой образ	144
§ 4. Теорема Римана — Роха	150

Глава 5

Эллиптические операторы на гладких многообразиях и K -теория	154
§ 1. Символ псевдодифференциального оператора	154
§ 2. Фредгольмовы операторы	160
§ 3. Соболевские нормы	167
§ 4. Формула Атья — Зингера для индекса эллиптического оператора.	171

Глава 6

Некоторые приложения теории векторных расслоений	174
§ 1. Сигнатуры многообразий	174
§ 2. C^* -алгебры и K -теория	183
§ 3. Семейства эллиптических операторов.	190
§ 4. Фредгольмовы представления дискретных групп	193
§ 5. Заключение.	195

Дополнение

Некоторые сведения из алгебры	200
Литература	205
Предметный указатель	208

В настоящее время роль геометрических методов в различных областях математики, а также в ряде областей естественных наук заметно усилилась. Кратко эту роль можно охарактеризовать следующим образом. Если методы математического анализа позволяют дать качественную характеристику явлений, так сказать, в малом, то геометрические методы позволяют дать аналогичное качественное описание этих явлений "в целом", при больших значениях тех или иных параметров. Другой, не менее важной особенностью геометрических методов является удобство геометрического языка для описания и качественного объяснения различных математических закономерностей. С этой точки зрения наряду с математическим анализом на многообразиях (или современной дифференциальной геометрией) большое развитие получила теория векторных расслоений, язык которой во многих задачах оказался наиболее удобным.

Достаточно назвать такие разделы самой математики, где язык векторных расслоений оказался очень плодотворным, как теория связностей в главных расслоениях, в терминах которой описываются различные варианты уравнений теории поля; теория групп преобразований, включая изучение симметрий уравнений различных физических задач; асимптотические методы уравнений в частных производных с малым параметром; теория эллиптических операторов; математические методы классической механики; математические методы в экономике. Имеются, правда, пока еще менее значительные применения расслоений и в других областях.

В последние годы университетское образование по математике значительно модернизировалось. Появились современные курсы по дифференциальной геометрии и топологии. Издаются учебники и учебные пособия по этим курсам. Что же касается специальности "геометрия и топология", то она, на наш взгляд, практически не обеспечена учебными пособиями. Имеющиеся монографии по теории расслоений, к сожалению, носят чисто теоретический характер, направлены только на внутренние задачи геометрии и топологии. Специалисты смежных специальностей практически не могут воспользоваться этими монографиями. Поэтому имеется необходимость в такой книге, в которой бы были изложены приложения методов векторных расслоений к различным задачам математики и естествознания.

Предлагаемая книга возникла из записок лекций, которые неоднократно читались автором в Московском университете для студентов старших курсов и аспирантов. Основное внимание уделено разъяснению важнейших понятий и геометрических конструкций, возникающих в теории векторных расслоений. Поэтому формулировки различных теорем приво-

дятся не в максимальной общности, а, напротив, таким образом, чтобы более прозрачным оказалась геометрическая сущность изучаемых объектов. По возможности приведены различные примеры, где проявляется роль векторных расслоений.

Таким образом, в книгу вошли такие разделы, как теория локально тривиальных расслоений и простейшие свойства векторных расслоений и операций с векторными расслоениями. Далее, изложены гомотопические свойства векторных расслоений, включая характеристические классы. Много внимания уделено уникальным геометрическим конструкциям, сводящим воедино различные способы построения векторных расслоений. После введения ряда геометрических конструкций изучены некоторые основные алгебраические приемы описания и вычисления в K -теории. Отдельно выделена самая интересная область применения векторных расслоений — теория эллиптических псевдодифференциальных операторов на компактных многообразиях.

Завершается изложение некоторыми другими приложениями теории векторных расслоений, которые изучались в разное время в топологии. Ряд вопросов, конечно, остался вне поля зрения данной книги, но, как нам представляется, не вошедшие в книгу разделы теории векторных расслоений носят более частный характер и могут быть изучены по другим источникам.

§ 1. Локально тривиальные расслоения

Понятие локально тривиального расслоения оформилось как понятие, выделяющее нечто общее для некоторых геометрических конструкций, примеры которых приведены ниже.

Боковая поверхность прямого круглого цилиндра представляется как объединение отрезков (образующих), параметризованных точками окружности (направляющей). Лист Мёбиуса тоже представляется как объединение отрезков, параметризованных точками окружности. Двумерный тор, расположенный в трехмерном пространстве, можно представить как объединение семейства окружностей (меридианов), параметризованных точками другой окружности (параллели).

Пусть M — некоторое гладкое многообразие, вложенное в евклидово пространство \mathbb{R}^N . Тогда образуем новое пространство TM , точками которого служат всевозможные касательные векторы к многообразию M в произвольных точках. Это новое пространство TM тоже является объединением своих подпространств $T_x M$, каждое из которых состоит из касательных к многообразию M векторов в одной точке x . Тогда точка x многообразия M параметризует семейство подпространств $T_x M$. Во всех этих случаях говорят, что пространство расслоено на слои, параметризованные точками базы.

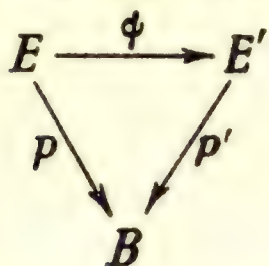
В приведенных примерах имеется два замечательных свойства: а) любые два слоя из семейства гомеоморфны друг другу; б) хотя в целом расслоенное пространство нельзя представить декартовым произведением слоя на пространство параметров — базу, однако, если ограничиться малой областью изменения параметра, то такая часть расслоенного пространства уже является прямым произведением. Эти два свойства и положены в основу следующего определения.

О п р е д е л е н и е. Пусть заданы два топологических пространства E и B и непрерывное отображение $p: E \rightarrow B$. Говорят, что отображение p задает *локально тривиальное расслоение*, если найдется такое пространство F , что для любой точки $x \in B$ существует ее окрестность $U \ni x$, для которой прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times F$. При этом требуется, чтобы гомеоморфизм $\varphi: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ был "послойным", т.е. было выполнено равенство $p(\varphi(x, f)) = x$, $x \in U$. Пространство E называют *тотальным пространством расслоения* или *расслоенным пространством*, пространство B называют *базой расслоения*, пространство F — *слоем расслоения*, а отображение p — *проекцией*. Требование, чтобы гомеоморфизмы φ были послойными, на алгебраическом языке означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(U) \\ \pi \searrow & & \swarrow p \\ & U & \end{array}$$

коммутативна, где $\pi: U \times F \rightarrow U$ — проекция на первый сомножитель, т.е. $\pi(x, f) = x$.

Одна из задач теории расслоенных пространств — описать в тех или иных терминах множество всевозможных локально тривиальных расслоений, у которых фиксированы база B и слой F . Два локально тривиальных расслоения $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ считаются изоморфными, если существует такой гомеоморфизм $\psi: E \rightarrow E'$, что диаграмма



коммутативна. Очевидно, что гомеоморфизм ψ задает также гомеоморфизм слоев $F \rightarrow F'$.

Для того чтобы задать локально тривиальное расслоение, не обязательно иметь тотальное пространство E . Достаточно задать базу B , слой F и некоторые отображения, по которым тотальное пространство E восстанавливается однозначно (с точностью до изоморфизма расслоений). Для этого поступим следующим образом. Согласно определению локально тривиального расслоения база B может быть покрыта системой открытых множеств $\{U_\alpha\}$, причем прообраз $p^{-1}(U_\alpha)$ послойно гомеоморфен $U_\alpha \times F$. Таким образом, мы получаем систему гомеоморфизмов

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha).$$

Поскольку гомеоморфизмы φ_α послойны, то совершенно ясно, что для открытого подмножества $V \subset U_\alpha$ ограничение φ_α на $V \times F$ осуществляет послойный гомеоморфизм пространства $V \times F$ на $p^{-1}(V)$. Пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ одновременно лежит как в U_α , так и в U_β . Значит, получается два послойных гомеоморфизма

$$\varphi_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

$$\varphi_\beta: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Обозначим через $\varphi_{\beta\alpha}$ гомеоморфизм $\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$, который отображает $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ в себя. Тогда локально тривиальное расслоение можно однозначно задать следующим набором: базой B , слоем F , покрытием $\{U_\alpha\}$ и гомеоморфизмами

$$\varphi_{\beta\alpha}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F.$$

Тотальное пространство E следует представлять в виде объединения декартовых произведений $U_\alpha \times F$ с некоторыми отождествлениями, которые задаются гомеоморфизмами $\varphi_{\beta\alpha}$.

По аналогии с терминологией для гладких многообразий открытые множества U_α называются *картами*, семейство $\{U_\alpha\}$ — *атласом*, гомеоморфизмы φ_α называются *координатными гомеоморфизмами*, а $\varphi_{\beta\alpha}$ — *функциями перехода* или *функциями склейки*. Иногда всю совокупность $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ называют атласом. Таким образом, всякий атлас определяет локально тривиальное расслоение. Различные атласы могут задавать изоморфные расслоения. Не всякий набор гомеоморфизмов φ_α задает атлас. Значит, для классификации локально тривиальных расслоений необходимо выделить такие гомеоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$, которые задают расслоение, и разбить их на классы, задающие изоморфные расслоения.

Если гомеоморфизмы $\varphi_{\beta\alpha}$ являются функциями перехода для некоторого локально тривиального расслоения, то $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta}^{-1} \varphi_{\alpha}$. Тогда, очевидно, для трех произвольных индексов α, β, γ на общей части $(U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}) \times F$ выполняется соотношение $\varphi_{\alpha\gamma} \varphi_{\gamma\beta} \varphi_{\beta\alpha} = \text{id}$, где id — тождественный гомеоморфизм. Для любого индекса α выполняется соотношение $\varphi_{\alpha\alpha} = \text{id}$. В частности, $\varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\beta\alpha} = \text{id}$, т.е. $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}$. Значит, для задания атласа нужно брать не произвольные гомеоморфизмы $\varphi_{\beta\alpha}$, а такие, чтобы

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \text{id}, \quad \varphi_{\alpha\gamma} \varphi_{\gamma\beta} \varphi_{\beta\alpha} = \text{id}. \quad (1)$$

Эти условия являются уже достаточными, чтобы по базе B , слою F , атласу $\{U_{\alpha}\}$ и гомеоморфизмам $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ определялось некоторое локально тривиальное расслоение. В самом деле, пусть $E' = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F)$ — несвязное объединение пространств $U_{\alpha} \times F$. Введем следующее отношение эквивалентности: точка $(x, f) \in U_{\alpha} \times F$ считается эквивалентной точке $(y, g) \in U_{\beta} \times F$, если $x = y \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$, $(y, g) = \varphi_{\beta\alpha}(x, f)$. Условие (1) гарантирует, что определенное отношение действительно задает отношение эквивалентности, т.е. множество E' разбивается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных точек. Факторпространство, задаваемое указанными отношениями эквивалентности, обозначим через E . Множество E превратим в топологическое пространство, объявив в нем подмножество G открытым, если объединение классов эквивалентных точек, соответствующих точкам множества G , является открытым, т.е. зададим в E фактортопологию по отношению к факторизации $\pi: E' \rightarrow E$, которая сопоставляет точке (x, f) ее класс эквивалентности. Пространство E' естественным образом отображается в B по формуле $p'(x, f) = x$. Очевидно, p' является непрерывным отображением, а эквивалентные точки имеют одинаковый образ. Значит, отображение p' задает отображение $p: E \rightarrow B$, которое весь класс эквивалентных точек отображает в одну с помощью p' . Отображение p является непрерывным. Осталось построить координатные гомеоморфизмы. Положим $\varphi_{\alpha} = \pi|_{(U_{\alpha} \times F)}$. Поскольку $p\varphi_{\alpha} = p'|_{(U_{\alpha} \times F)}$, то $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \times F) \subset p^{-1}(U_{\alpha})$. Каждый класс $z \in p^{-1}(U_{\alpha})$ имеет ровно одного представителя $(x, f) \in U_{\alpha} \times F$. Значит, φ_{α} является взаимно однозначным отображением. В силу факторности топологии в E отображение φ_{α} является гомеоморфизмом.

Итак, мы показали, что локально тривиальное расслоение задается атласом $\{U_{\alpha}\}$ и семейством гомеоморфизмов $\varphi_{\beta\alpha}$, удовлетворяющих условиям (1).

Выясним теперь, когда два атласа задают изоморфные расслоения. Прежде всего заметим, что если у расслоений $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ с одинаковым слоем F имеется атлас с одинаковыми функциями склейки $\varphi_{\alpha\beta}$, то эти два расслоения изоморфны. В самом деле, пусть

$$\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \times F \rightarrow p^{-1}(U_{\alpha}), \quad \psi_{\alpha}: U_{\alpha} \times F \rightarrow p'^{-1}(U_{\alpha})$$

— соответствующие координатные гомеоморфизмы и $\varphi_{\beta}^{-1} \varphi_{\alpha} = \psi_{\beta}^{-1} \psi_{\alpha} = \varphi_{\beta\alpha}$. Построим гомеоморфизм $\psi: E' \rightarrow E$. Пусть $x \in E'$. Поскольку атлас $\{U_{\alpha}\}$ покрывает базу B , то $x \in p'^{-1}(U_{\alpha})$ для некоторого индекса α . Тогда полагаем $\psi(x) = \varphi_{\alpha} \psi_{\alpha}^{-1}(x)$. Необходимо только установить, что значение $\psi(x)$ не зависит от выбора индекса α . В самом деле, если $x \in p'^{-1}(U_{\alpha})$, то $\varphi_{\beta} \psi_{\beta}^{-1}(x) = \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \varphi_{\beta} \psi_{\beta}^{-1} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^{-1}(x) = \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\beta\alpha} \psi_{\alpha}^{-1}(x) = \varphi_{\alpha} \psi_{\alpha}^{-1}(x)$. Значит, действительно, определение $\psi(x)$ не зависит от выбора карты U_{α} . Непрерывность и прочие свойства ψ очевидны.

Далее заметим, что если заданы атлас $\{U_{\alpha}\}$ и координатные гомеоморфизмы φ_{α} , а $\{V_{\beta}\}$ — более мелкий атлас (т.е. $V_{\beta} \subset U_{\alpha}$ для некоторого $\alpha = \alpha(\beta)$), то для атласа $\{V_{\beta}\}$ естественным образом определяются коорди-

натные гомеоморфизмы

$$\varphi'_\beta = \varphi_{\alpha(\beta)} | (V_\beta \times F): V_\beta \times F \rightarrow p^{-1}(V_\beta).$$

При этом функции склейки $\varphi'_{\beta_1 \beta_2}$ для нового атласа $\{V_\beta\}$ тоже определяются с помощью ограничений

$$\varphi'_{\beta_1 \beta_2} = \varphi_{\alpha(\beta_1) \alpha(\beta_2)} | (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2}) \times F.$$

Таким образом, если заданы два атласа и функции склейки для двух расслоений, то, переходя к общему более мелкому атласу и ограничению функций склейки, мы всегда можем для удобства считать, что атлас у двух расслоений один и тот же.

Итак, пусть заданы два набора функций склейки $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi'_{\beta\alpha}$ (для одного атласа $\{U_\alpha\}$), которые определяют изоморфные расслоения. Требуется найти соотношения на функции склейки $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi'_{\beta\alpha}$.

Т е о р е м а. Два набора функций склейки $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi'_{\beta\alpha}$ определяют изоморфные локально тривиальные расслоения тогда и только тогда, когда существуют такие послойные гомеоморфизмы $h_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$, что

$$\varphi_{\beta\alpha} = h_\beta^{-1} \varphi'_{\beta\alpha} h_\alpha. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если расслоения $p': E' \rightarrow B$ и $p: E \rightarrow B$ с координатными гомеоморфизмами $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ изоморфны, т.е. существует гомеоморфизм $\psi: E' \rightarrow E$, то полагаем

$$h_\alpha = \varphi'^{-1}_\alpha \psi^{-1} \varphi_\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_\beta^{-1} \varphi'_{\beta\alpha} h_\alpha &= \varphi_\beta^{-1} \psi \varphi'_\beta \varphi'_{\beta\alpha} \varphi'^{-1}_\alpha \psi^{-1} \varphi_\alpha = \\ &= \varphi_\beta^{-1} \psi \varphi'_\beta \varphi'^{-1}_\beta \varphi'_\alpha \varphi'^{-1}_\alpha \psi^{-1} \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Обратно, если выполняется соотношение (2), то полагаем

$$\psi = \varphi_\alpha h_\alpha^{-1} \varphi'^{-1}_\alpha. \quad (3)$$

Определение (3) годится для подпространств $p'^{-1}(U_\alpha)$, которые покрывают E' . Для доказательства совпадения значений правых частей (3) на пересечениях $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ воспользуемся соотношениями (2):

$$\begin{aligned} \varphi_\beta h_\beta^{-1} \varphi'^{-1}_\beta &= \varphi_\alpha \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\beta h_\beta^{-1} \varphi'^{-1}_\beta \varphi'_\alpha \varphi_\alpha'^{-1} = \\ &= \varphi_\alpha \varphi_{\alpha\beta} h_\beta^{-1} \varphi'_{\beta\alpha} \varphi_\alpha'^{-1} = \varphi_\alpha h_\alpha^{-1} \varphi'_{\alpha\beta} h_\beta h_\beta^{-1} \varphi'_{\beta\alpha} \varphi_\alpha'^{-1} = \\ &= \varphi_\alpha h_\alpha^{-1} \varphi_\alpha'^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

П р и м е р ы. 1. Пусть $E = B \times F$, $p: E \rightarrow B$ является проекцией на первый сомножитель. В этом случае атлас состоит из одной карты $U_\alpha = B$. Поэтому имеется ровно одна функция склейки $\varphi_{\alpha\alpha} = \text{id}$. Такое расслоение называется тривиальным расслоением.

2. Пусть E — лист Мёбиуса, который мы будем представлять как квадрат на плоскости xOy , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, у которого произведены отождествления точек $(0, y)$ с точками $(1, 1 - y)$. Проекция p отображает пространство E на отрезок $I_x = \{0 \leq x \leq 1\}$ с отождествленными концами $x = 0$ и $x = 1$, т.е. на окружность S^1 . Покажем, что отображение p задает локально тривиальное расслоение. Атлас будет состоять из двух интервалов

$$U_\alpha = \{0 < x < 1\}, \quad U_\beta = \{0 \leq x < 1/2\} \cup \{1/2 < x \leq 1\}.$$

Координатные гомеоморфизмы задаются формулами

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times I_y \rightarrow E, \quad \varphi_\alpha(x, y) = (x, y), \quad \varphi_\beta: U_\beta \times I_y \rightarrow E,$$

$$\varphi_\beta(x, y) = (x, y) \text{ для } 0 \leq x < 1/2,$$

$$\varphi_\beta(x, y) = (x, 1 - y) \text{ для } 1/2 < x \leq 1.$$

Пересечение карт $U_\alpha \cap U_\beta$ представляет объединение двух интервалов

$U_\alpha \cap U_\beta = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$, а функция склейки $\varphi_{\beta\alpha}$ имеет вид

$$\varphi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, y) \text{ для } 0 < x < 1/2,$$

$$\varphi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, 1 - y) \text{ для } 1/2 < x < 1.$$

Лист Мёбиуса не изоморфен тривиальному расслоению. В самом деле, у тривиального расслоения все функции склейки можно выбрать тождественными гомеоморфизмами. Тогда согласно теореме нашлись бы такие послойные гомеоморфизмы

$$h_\alpha: U_\alpha \times I_y \rightarrow U_\alpha \times I_y, \quad h_\beta: U_\beta \times I_y \rightarrow U_\beta \times I_y,$$

что

$$\varphi_{\beta\alpha} = h_\beta^{-1} h_\alpha$$

в области определения $(U_\alpha \cap U_\beta) \times I_y$. Поскольку h_α, h_β — послойные гомеоморфизмы, то для фиксированного значения первого аргумента x получаем гомеоморфизмы отрезка I_y в себя. Всякий гомеоморфизм отрезка в себя отображает концевые точки снова в концевые точки. Поэтому

$$h_\alpha(x, 0), \quad h_\alpha(x, 1), \quad h_\beta(x, 0), \quad h_\beta(x, 1)$$

— постоянные функции, равные нулю или единице. Поэтому композиция $h_\beta^{-1} h_\alpha(x, 0)$ является постоянной функцией, равной нулю или единице. Функция же $\varphi_{\beta\alpha}(x, 0)$ непостоянна — она равна нулю при $0 < x < 1/2$ и единице при $1/2 < x < 1$. Противоречие показывает, что лист Мёбиуса не изоморфен тривиальному расслоению.

3. Пусть E — пространство касательных векторов к двумерной сфере S^2 , лежащей в трехмерном евклидовом пространстве R^3 . Пусть $p: E \rightarrow S^2$ — отображение, сопоставляющее каждому касательному вектору его начальную точку. Покажем, что p задает локально тривиальное расслоение со слоем R^2 . Фиксируем точку $s_0 \in S^2$. Выберем декартову систему координат в R^3 так, чтобы точка s_0 была северным полюсом на сфере (т.е. координаты точки s_0 равнялись $(0, 0, 1)$). Пусть U — открытое множество на сфере S^2 , задаваемое неравенством $z > 0$. Если $s \in U, s = (x, y, z)$, то $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$. Пусть вектор $e = (\xi, \eta, \zeta)$ касается сферы в точке s . Тогда $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$, т.е. $\zeta = -(x\xi + y\eta)/z$. Зададим отображение

$$\varphi: U \times R^2 \rightarrow p^{-1}(U)$$

формулой

$$\varphi(x, y, z, \xi, \eta) = (x, y, z, \xi, \eta, -(x\xi + y\eta)/z).$$

Мы получили координатный гомеоморфизм для карты U , содержащей наперед заданную произвольную точку $s_0 \in S^2$. Таким образом, отображение p является локально тривиальным расслоением. Оно называется *касательным расслоением* к сфере S^2 .

§ 2. Структурные группы локально тривиальных расслоений

Соотношения (1) и (2), полученные в предыдущем параграфе для функций склейки, определяющих локально тривиальные расслоения, похожи на соответствующие формулы при вычислении одномерных когомологий топологического пространства с коэффициентами в некотором алгебраическом пучке. Впрочем, эта аналогия может быть полностью объяснена, если несколько изменить обозначения и терминологию. Нам же это изменение терминологии окажется полезным при изучении задачи классификации локально тривиальных расслоений.

Заметим, что послойный гомеоморфизм декартова произведения базы U на слой F ,

$$\varphi: U \times F \rightarrow U \times F,$$

можно представить себе как семейство гомеоморфизмов слоя F , параметризованное точками базы U . Другими словами, послойный гомеоморфизм φ задает отображение $\bar{\varphi}: U \rightarrow \text{Homeo}(F)$, где $\text{Homeo}(F)$ — группа всех гомеоморфизмов слоя F . Если подобрать подходящим образом топологию в группе $\text{Homeo}(F)$, то отображение $\bar{\varphi}$ окажется непрерывным. Иногда верно и обратное: отображение $\bar{\varphi}: U \rightarrow \text{Homeo}(F)$ порождает послойный гомеоморфизм $\varphi: U \times F \rightarrow U \times F$ по формуле $\varphi(x, f) = (x, \bar{\varphi}(x)f)$. Тогда вместо послойных гомеоморфизмов $\varphi_{\alpha\beta}$ следует задать функции $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$, определенные на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ и принимающие значения в группе $\text{Homeo}(F)$. Набор таких функций называется в гомологической алгебре *одномерной коцепью* со значениями в пучке ростков функций, принимающих значения в группе $\text{Homeo}(F)$. Условие (1) § 1 означает, что

$$\bar{\varphi}_{\alpha\alpha}(x) = 1, \quad \bar{\varphi}_{\alpha\gamma}(x) \bar{\varphi}_{\gamma\beta}(x) \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = 1,$$

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

В этом случае говорят, что коцепь $\{\bar{\varphi}_{\alpha\beta}\}$ является *коциклом*. Условие (2) означает, что существует нульмерная коцепь, составленная из функций $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Homeo}(F)$, такая, что

$$\bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = h_\beta^{-1}(x) \bar{\varphi}'_{\beta\alpha}(x) h_\alpha(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

На языке гомологической алгебры условие (2) § 1 означает, что коциклы $\{\bar{\varphi}_{\beta\alpha}\}$ и $\{\bar{\varphi}'_{\beta\alpha}\}$ когомологичны. Таким образом, можно сказать, что множество локально тривиальных расслоений со слоем F и базой B находится во взаимно однозначном соответствии с одномерными когомологиями пространства B с коэффициентами в пучке ростков непрерывных $\text{Homeo}(F)$ -значных функций для данного открытого покрытия $\{U_\alpha\}$. Хотя получилась простая с точки зрения гомологической алгебры характеристика множества локально тривиальных расслоений, однако она совершенно неэффективна, поскольку отсутствуют какие-либо методы вычислений подобного сорта когомологий. Тем не менее указанное представление функций склейки в виде коцикла оказывается полезным в силу приведенных ниже обстоятельств.

Прежде всего отметим, что в новой трактовке описание локально тривиального расслоения задается базой B , атласом $\{U_\alpha\}$ и функциями $\varphi_{\alpha\beta}$, принимающими значения в группе $G = \text{Homeo}(F)$. Сам слой F не принимает участия в описании расслоения. Поэтому можно, во-первых, описывать сначала локально тривиальные расслоения как набор функций $\varphi_{\alpha\beta}$ со значениями в произвольной топологической группе G , а потом строить тотальное пространство расслоения со слоем F , дополнительно задавая действия груп-

пы G на пространстве F , т.е. задавая непрерывный гомоморфизм группы G в группу $\text{Homeo}(F)$. Во-вторых, понятие локально тривиального расслоения можно обобщить и сделать более богатой структуру расслоения, потребовав, чтобы функция склейки $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$, а также функции h_α были не произвольными гомеоморфизмами, а принимали значения в некоторой подгруппе группы гомеоморфизмов $\text{Homeo}(F)$ слоя F . В-третьих, иногда удается получить информацию о локально тривиальных расслоениях, если вместо исходного слоя F рассматривать локально тривиальные расслоения с теми же функциями склейки, но другим, более подходящим слоем F' .

Таким образом, мы приходим к новому определению локально тривиального расслоения с дополнительным объектом — группой, в которой принимаются значения функций склейки.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть заданы топологические пространства E, B, F и топологическая группа G , непрерывно действующая на пространстве F . Скажем, что непрерывное отображение $p: E \rightarrow B$ является *локально тривиальным расслоением со слоем F и структурной группой G* , если заданы такие атлас $\{U_\alpha\}$ и координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, что функции склейки $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ определяются формулами

$$\varphi_{\beta\alpha}(x, f) = (x, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) f),$$

где $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\bar{\varphi}_{\alpha\alpha}(x) \equiv 1, \quad x \in U_\alpha,$$

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta}(x) \bar{\varphi}_{\gamma\beta}(x) \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) \equiv 1, \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

(1)

Функции $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ тоже будем называть функциями склейки.

Пусть $\psi: E' \rightarrow E$ — изоморфизм локально тривиальных расслоений со структурной группой G , а $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ — координатные гомеоморфизмы расслоений $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$. Будем говорить, что изоморфизм ψ *согласован со структурной группой G* , если гомеоморфизмы

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$$

задаются с помощью непрерывных функций $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$, определяющихся из соотношения

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, f) = (x, h_\alpha(x) f).$$

Мы видим, что два расслоения со структурной группой G и функциями склейки $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ и $\bar{\varphi}'_{\beta\alpha}$ изоморфны, причем изоморфизм согласован со структурной группой G в случае, если

$$\bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = h_\beta(x) \bar{\varphi}'_{\beta\alpha}(x) h_\alpha(x) \quad (2)$$

для некоторых непрерывных функций $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$. Два расслоения, функции склейки которых удовлетворяют условию (2), мы будем называть *эквивалентными*.

Полезно иногда увеличивать или уменьшать структурную группу G . Расслоения, не эквивалентные для структурной группы G , могут оказаться эквивалентными для большей структурной группы $G' \supset G$. Если расслоение со структурной группой G допускает набор функций склейки со значениями в подгруппе H , то говорят, что структурная группа G *редуцируется к подгруппе H* . Очевидно, что если структурная группа расслоения $p: E \rightarrow B$ состоит из одного единичного элемента, то само расслоение тривиально.

Таким образом, доказать тривиальность расслоения — это значит доказать, что его структурная группа G редуцируется к единичной подгруппе.

Более общо, если $\rho: G \rightarrow G'$ — непрерывный гомоморфизм топологических групп, то по локально тривиальному расслоению со структурной группой G и функциями склейки $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ строится новое локально тривиальное расслоение со структурной группой G' , функции склейки которого равны $\varphi'_{\beta\alpha}(x) = \rho(\varphi_{\beta\alpha}(x))$. Такая операция называется *заменой структурной группы* (с помощью гомоморфизма ρ).

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на то, что не всегда послойный гомеоморфизм $\varphi: U \times F \rightarrow U \times F$ индуцируется непрерывным отображением $\bar{\varphi}: U \rightarrow \text{Homeo}(F)$. Мы не будем детально анализировать ситуацию, только заметим, что во всех дальнейших приложениях участвующие послойные гомеоморфизмы будут индуцироваться непрерывными отображениями в структурную группу.

Теперь мы можем вернуться к третьему обстоятельству — возможности выбрать подходящее пространство в качестве слоя локально тривиального расслоения со структурной группой G . В качестве такого слоя возьмем $F = G$, а в качестве действия группы G на F — левые сдвиги, т.е. будем считать, что элемент $g \in G$ действует на пространстве F как гомеоморфизм $g(f) = gf$, $f \in F = G$.

О п р е д е л е н и е 2. Локально тривиальное расслоение со структурной группой G называется *главным G -расслоением*, если $F = G$, а действие группы G на слое F задается левыми сдвигами.

Замечательная особенность главных G -расслоений заключается в том, что для того, чтобы проверить, согласован ли данный изоморфизм расслоений со структурной группой G , вместо использования координатных гомеоморфизмов (выбор которых неоднозначен) можно пользоваться другими инвариантными свойствами этих расслоений.

Т е о р е м а 1. Пусть $p: E \rightarrow B$ — главное G -расслоение, $\varphi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ — координатные гомеоморфизмы. Существует единственное правое действие группы G на тотальном пространстве E , удовлетворяющее условиям:

1) Правое действие группы G послойно, т.е. $p(x) = p(xg)$ для любых элементов $x \in E$, $g \in G$.

2) Гомеоморфизм φ_α^{-1} переводит правое действие группы в тотальном пространстве в правые сдвиги по второму сомножителю, т.е.

$$\varphi_\alpha(x, f)g = \varphi_\alpha(x, fg), \quad x \in U_\alpha, \quad f, g \in G. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку изучаемое расслоение является главным G -расслоением, то согласно определениям 1 и 2 функции склейки $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$ имеют следующий вид:

$$\varphi_{\beta\alpha}(x, f) = (x, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x)f),$$

где $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (1). Так как всякая точка $z \in E$ представляется в виде $z = \varphi_\alpha(x, f)$ для некоторого индекса α , то формула (3) однозначно определяет непрерывное правое действие группы G , если действие группы G , определенное по формулам (3), не зависит от выбора индекса α . Таким образом, если $z = \varphi_\alpha(x, f) = \varphi_\beta(x, f')$, то $(x, f') = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha(x, f) = \varphi_{\beta\alpha}(x, f) = (x, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x)f)$, т.е. $f' = \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x)f$. Необходимо показать, что элемент zg не зависит от выбора индекса, т.е. достаточно проверить, что $\varphi_\alpha(x, fg) = \varphi_\beta(x, f'g)$, или $(x, f'g) = (\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha(x, fg)) = \varphi_{\beta\alpha}(x, fg) = (x, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x)fg)$. Другими

словами, достаточно показать, что $f'g = \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x)fg$. Последняя же формула после сокращения справа на элемент g дает уже полученное ранее соотношение. Теорема 1 доказана.

Согласно теореме 1 главные G -расслоения мы будем рассматривать вместе с найденным правым действием группы G на тотальном пространстве.

Т е о р е м а 2. *Послойное отображение $\psi: E' \rightarrow E$ тотальных пространств главных G -расслоений является изоморфизмом, согласованным со структурной группой G тогда и только тогда, когда оно эквивариантно (т.е. перестановочно с правым действием группы G).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим, как и ранее, координатные гомеоморфизмы расслоений $p': E' \rightarrow B$ и $p: E \rightarrow B$ через φ'_α и φ_α . Согласно определению изоморфизм $\psi: E' \rightarrow E$ согласован со структурной группой G , если гомеоморфизмы

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow U_\alpha \times G$$

задаются по формуле

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, g) = (x, h_\alpha(x)g), \quad x \in U_\alpha, \quad g \in G, \quad (4)$$

для некоторых непрерывных функций $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$. Очевидно, что отображения, задаваемые формулой (4), эквивариантны относительно правых сдвигов по второй координате, т.е.

$$[\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, g)]g_1 = (x, h_\alpha(x)g)g_1 = (x, h_\alpha(x)gg_1) = \varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, gg_1).$$

Значит, отображение ψ эквивариантно относительно правых действий группы G на тотальных пространствах E и E' .

Обратно, пусть отображение ψ эквивариантно относительно правых действий группы G на тотальных пространствах E и E' . Тогда по теореме 1 отображение $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha$ эквивариантно относительно правых сдвигов пространства $U_\alpha \times G$ по второй координате. Отображение $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha$ является послойным, поэтому оно имеет следующий вид:

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, g) = (x, A_\alpha(x, g)).$$

Эквивариантность этого отображения относительно правых сдвигов второй координаты означает, что

$$A_\alpha(x, gg_1) = A_\alpha(x, g)g_1$$

для любых $x \in U_\alpha$, $g, g_1 \in G$. В частности, полагая $g = e$, получаем

$$A_\alpha(x, g_1) = A_\alpha(x, e)g_1.$$

Таким образом, если $h_\alpha(x) = A_\alpha(x, e)$, то $A_\alpha(x, g) = h_\alpha(x)g$, т.е. $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha(x, g) = (x, h_\alpha(x)g)$. Поэтому отображение ψ согласовано со структурной группой G . В частности, из предыдущих формул следует, что отображения $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\alpha$, а значит, и отображение ψ являются гомеоморфизмами. Теорема 2 доказана.

Таким образом, согласно теореме 2 для того, чтобы выяснить, изоморфны ли два расслоения со структурной группой G (и одинаковой базой B), необходимо и достаточно выяснить, существует ли эквивариантное отображение соответствующих главных расслоений, т.е. такое эквивариантное отображение тотальных пространств, которое является послойным (и индуцирует тождественное отображение на базе B).

Если одно из расслоений тривиально, скажем, $E' = B \times G$, то для того, чтобы построить эквивариантное отображение $\psi: E' \rightarrow E$, достаточно задать

его всего лишь для точек вида (x, e) , $x \in B$, $e \in G$ — единица в группе G . Тогда в силу эквивариантности значения отображения ψ для произвольных значений аргументов (x, g) восстанавливаются однозначно по формуле $\psi(x, g) = \psi(x, e)g$. Отображение $\psi(x, e) \in E$ можно понимать как отображение s базы B в тотальное пространство, причем $ps(x) \equiv x$. Такие отображения называются *сечениями* расслоения $p: E \rightarrow B$.

Тривиальное главное G -расслоение обладает сечениями. Например, сечением является отображение $B \rightarrow B \times G$, задаваемое соответствием $x \rightarrow (x, e)$. Обратно, если у главного G -расслоения $p: E \rightarrow B$ имеется сечение $s: B \rightarrow E$, то расслоение изоморфно тривиальному расслоению. Изоморфизм $\psi: B \times G \rightarrow E$ задается формулой $\psi(x, g) = s(x)g$, $x \in B$, $g \in G$.

Ослабим теперь наши ограничения на эквивариантные отображения главных расслоений со структурной группой G . Будем рассматривать произвольные эквивариантные отображения тотальных пространств главных G -расслоений с произвольными базами. Поскольку каждый слой главного G -расслоения является орбитой правого действия группы G на тотальном пространстве расслоения, то всякое эквивариантное отображение $\psi: E' \rightarrow E$ тотальных пространств отображает слой расслоения $p': E' \rightarrow B'$ в некоторый слой расслоения $p: E \rightarrow B$. Другими словами, отображение ψ порождает некоторое отображение $\chi: B' \rightarrow B$ без расслоений, причем диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\psi} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\chi} & B \end{array}$$

является коммутативной. Пусть $U_\alpha \subset B$ — некоторая карта в базе B и U'_β — такая карта в базе B' , что $\chi(U'_\beta) \subset U_\alpha$. Поскольку для любого локального тривиального расслоения можно выбрать сколь угодно мелкий атлас, то всегда найдется такая карта U_α , что $\chi(U'_\beta) \subset U_\alpha$. Переходя к отображению $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\beta$, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} U'_\beta \times G & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\beta} & U_\alpha \times G \\ p' \varphi'_\beta \downarrow & & \downarrow p \varphi_\alpha \\ U'_\beta & \xrightarrow{\chi} & U_\alpha \end{array}$$

В этой диаграмме отображения $p' \varphi'_\beta$ и $p \varphi_\alpha$ являются проекциями на первые сомножители. Поэтому отображение $\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\beta$ имеет вид

$$\varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_\beta(x', g) = (\chi(x'), h_\beta(x')g).$$

Следовательно, отображение $\chi: B' \rightarrow B$ непрерывно.

Сравним теперь функции склейки двух расслоений. Имеем

$$(x', \bar{\varphi}'_{\beta_1 \beta_2}(x')g) = \varphi'_{\beta_1 \beta_2}(x', g) = \varphi'^{-1}_{\beta_1} \varphi'_{\beta_2}(x', g).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\chi(x'), h_{\beta_1}(x') \bar{\varphi}'_{\beta_1 \beta_2}(x')g) &= \varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_{\beta_1} \varphi'^{-1}_{\beta_1} \varphi'_{\beta_2}(x', g) = \varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_{\beta_2}(x', g) = \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_\alpha^{-1} \psi \varphi'_{\beta_2}(x', g) = (\chi(x'), \bar{\varphi}_{\alpha_1 \alpha_2}(\chi(x')) h_{\beta_2}(x')g). \end{aligned}$$

т.е.

$$h_{\beta_1}(x') \bar{\varphi}_{\beta_1 \beta_2}(x') = \bar{\varphi}_{\alpha_1 \alpha_2}(\chi(x')) h_{\beta_2}(x'),$$

или

$$h_{\beta_1}(x') \bar{\varphi}'_{\beta_1 \beta_2}(x') h_{\beta_2}^{-1}(x') = \bar{\varphi}_{\alpha_1 \alpha_2}(\chi(x')). \quad (6)$$

Согласно теореме из § 1 в левой части формулы (6) стоят функции склейки расслоения, изоморфного расслоению $p': E' \rightarrow B'$.

Таким образом, всякое эквивариантное отображение тотальных пространств индуцирует отображение баз $\chi: B' \rightarrow B$, причем при подходящем выборе координатных гомеоморфизмов функции склейки расслоения $p': E' \rightarrow B'$ являются прообразами функций склейки расслоения $p: E \rightarrow B$.

Верно и обратное: если $\chi: B' \rightarrow B$ — непрерывное отображение, $p: E \rightarrow B$ — главное G -расслоение, то, положив

$$U'_\alpha = \chi^{-1}(U_\alpha), \quad \bar{\varphi}'_{\alpha\beta}(x') = \bar{\varphi}_{\alpha\beta}(\chi(x)), \quad (7)$$

мы получим некоторое главное G -расслоение $p': E' \rightarrow B'$. Тогда существует эквивариантное отображение $\psi: E' \rightarrow E$, для которого диаграмма (5) коммутативна.

Расслоение, задаваемое функциями склейки по формулам (7), называется *прообразом расслоения $p: E \rightarrow B$ при отображении χ* . Если $\chi: B' \rightarrow B$ является вложением, то иногда говорят, что прообраз расслоения при отображении χ есть *ограничение расслоения на подпространство $B'' = \chi(B')$* . В этом случае тотальное пространство ограничения расслоения на подпространство B'' совпадает с прообразом $E'' = p^{-1}(B'') \subset E$.

Таким образом, если $\overset{\psi}{E'} \rightarrow E$ — эквивариантное отображение тотальных пространств главных G -расслоений, то расслоение $p': E' \rightarrow B'$ является прообразом расслоения $p: E \rightarrow B$ при отображении $\chi: B' \rightarrow B$.

Построение прообразов расслоений является важным способом конструировать новые локально тривиальные расслоения. Следующая теорема показывает, что прообразы расслоений для гомотопных отображений баз являются изоморфными расслоениями.

Т е о р е м а 3. Пусть $p: E \rightarrow B \times I$ — главное G -расслоение, база которого является декартовым произведением компактного пространства B и единичного отрезка $I = [0, 1]$, а G — группа Ли. Тогда ограничения расслоения p на подпространства $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что атлас $\{U_\alpha\}$ получается из некоторого атласа $\{V_\beta\}$ на пространстве B и конечной системы интервалов (a_k, a_{k+1}) , покрывающих отрезок I : $U_\alpha = V_\beta \times (a_k, a_{k+1})$. Более того, можно считать, что интервал (a_k, a_{k+1}) ровно один и равен I , так что $U_\alpha = V_\alpha \times I$. Тогда функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}$ зависят от двух аргументов $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ и $t \in I$. Далее можно считать, что функции $\varphi_{\alpha\beta}$ определены и непрерывны на замыканиях $\bar{V}_\alpha \cap \bar{V}_\beta$, а значит, равномерно непрерывны. Следовательно, существует такая открытая окрестность O единичного элемента группы G , гомеоморфная шару, что

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, t_1) \varphi_{\alpha\beta}^{-1}(x, t_2) \in O, \quad x \in V_\alpha \cap V_\beta, \quad t_1, t_2 \in I,$$

причем степень O^N лежит тоже в некотором шаре, где N — число карт.

Функции $h_\alpha: V_\alpha \rightarrow G$, $1 \leq \alpha \leq n$, будем строить по индукции. Положим $h_1(x) \equiv 1$. Тогда функция $h_2(x)$ задается на множестве $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$ формулой

$$h_2(x) = \varphi_{12}^{-1}(x, 1) \varphi_{12}(x, 0) \in O$$

и, следовательно, может быть продолжена на всю карту $V_2, h_2: V_2 \rightarrow O$. Далее, функция $h_\beta(x)$ задается на множестве $\bar{V}_\alpha \cap \bar{V}_\beta, \alpha < \beta$, формулой

$$h_\beta(x) = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}(x, 1)h_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x, 0).$$

Предположим, что функции $h_\alpha(x) \in O^\alpha$ уже определены для всех $\alpha < \beta$. Тогда функция $h_\beta(x)$ определена на множестве $\bigcup_{\alpha < \beta} \bar{V}_\alpha \cap \bar{V}_\beta$ и принимает

значения в шаре O^β . Следовательно, функция h_β продолжается на всю карту \bar{V}_β со значениями в O^β . Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. Если функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ и $\psi_{\alpha\beta}(x)$ гомотопны в классе функций склейки, то соответствующие им расслоения изоморфны.

П р и м е р ы. 1. В § 1 в качестве примера локально тривиального расслоения рассматривался лист Мёбиуса. Функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}$ принимали в группе гомеоморфизмов слоя два значения: тождественный гомеоморфизм $e(y) \equiv y, y \in I$, и гомеоморфизм $j(y) \equiv 1 - y, y \in I$. Группа, образованная двумя элементами e и j , имеет второй порядок, поскольку $j^2 = e$. Таким образом, вместо листа Мёбиуса можно рассматривать соответствующее главное расслоение со структурной группой $G = Z_2$. Как топологическое пространство группа G состоит из двух изолированных точек, так что слоем главного G -расслоения является дискретное двоеточие. Это расслоенное пространство можно представить себе как два отрезка, концы которых отождествляются "накрест". Таким образом, тотальное пространство тоже является окружностью, а проекция $p: S^1 \rightarrow S^1$ является двулистным накрытием (рис. 1). Если бы построенное расслоение было тривиальным, то тотальное пространство $E = B \times Z_2$ имело бы две компоненты связности.

2. В примере 3 § 1 рассматривалось касательное расслоение к двумерной сфере S^2 . Координатные гомеоморфизмы

$$\varphi: U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

задавались такими формулами, что они являлись линейными отображениями относительно второго аргумента. Значит, и функции склейки тоже принимают значения в группе линейных преобразований слоя $F = \mathbb{R}^2$, т.е. $G = GL(2, \mathbb{R})$. Можно показать, что структурная группа всех линейных преобразований редуцируется к своей подгруппе ортогональных преобразований, т.е. к группе $O(2)$, образованной поворотами и отражениями двумерной плоскости.

Поясним это утверждение на нашем примере касательного расслоения к двумерной сфере S^2 . Задать координатный гомеоморфизм — это то же са-

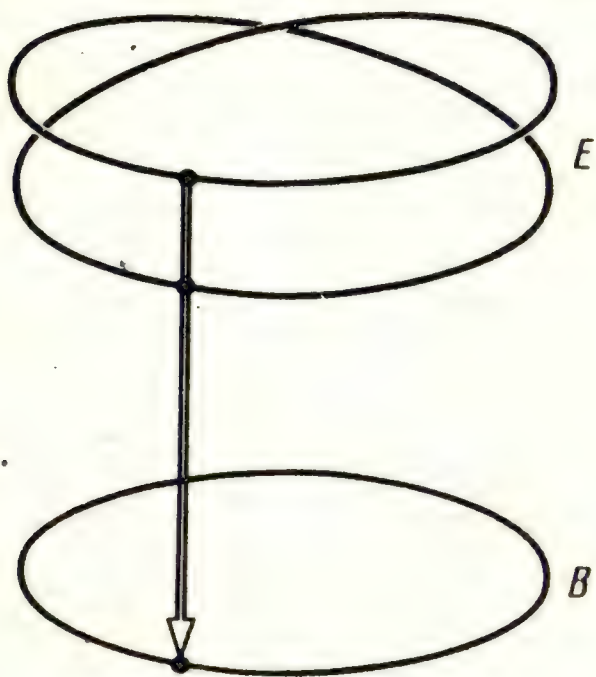


Рис. 1.

мое, что задать в каждой точке карты $U_\alpha \subset S^2$ базис касательных векторов $e_1(x), e_2(x), x \in U_\alpha$, причем функции $e_1(x)$ и $e_2(x)$ должны быть непрерывны. Выберем две карты $U_\alpha = \{(x, y, z): z \neq 1\}, U_\beta = \{(x, y, z): z \neq -1\}$. Южный полюс $P_0 = (0, 0, -1)$ принадлежит карте U_α , а северный полюс $P_1 = (0, 0, +1)$ принадлежит карте U_β . Проведем все меридианы. Выберем ортонормированный базис в касательном пространстве в точке P_0 и перенесем его с помощью операции параллельного перенесения в римановой метрике сферы S^2 вдоль всех меридианов в точки карты U_α . Таким образом, получится

непрерывное семейство ортонормированных базисов $e_1(x), e_2(x), x \in U_\alpha$. Аналогично, выберем ортонормированный базис в северном полюсе и с помощью операции параллельного перенесения вдоль всех меридианов перенесем его в точки карты U_β . Получится непрерывное семейство $e'_1(x), e'_2(x)$ ортонормированных базисов в точках $x \in U_\beta$. Тогда координатные гомеоморфизмы задаются формулами

$$\varphi_\alpha(x, \xi, \eta) = \xi e_1(x) + \eta e_2(x),$$

$$\varphi_\beta(x, \xi', \eta') = \xi' e'_1(x) + \eta' e'_2(x).$$

Функция склейки $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$ выражает координаты (ξ', η') касательного вектора в точке $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ в базисе $e'_1(x), e'_2(x)$ через координаты (ξ, η) того же вектора в базисе $e_1(x), e_2(x)$. Поскольку оба базиса ортонормированы, то координаты (ξ', η') выражаются через координаты (ξ, η) с помощью умножения на ортогональную матрицу.

Таким образом, структурная группа $GL(2, \mathbb{R})$ касательного расслоения к сфере S^2 редуцируется к своей подгруппе $O(2) \subset GL(2, \mathbb{R})$.

3. Всякое тривиальное расслоение с базой B можно получить как прообраз при отображении базы B в одноточечное пространство $\{pt\}$, служащее базой тривиального расслоения.

§ 3. Векторные расслоения

Важный частный случай локально тривиальных расслоений со структурной группой представляет класс расслоений, у которых в качестве слоя берется (конечномерное) векторное пространство, а в качестве структурной группы — группа линейных преобразований этого векторного пространства. Такие расслоения называются *векторными расслоениями*. Касательное расслоение к двумерной сфере S^2 является, таким образом, векторным расслоением.

Рассматривают также и такие локально тривиальные расслоения, у которых в качестве слоя служит некоторое бесконечномерное банахово пространство, а в качестве структурной группы — группа ограниченных обратимых операторов банахова пространства. В случае конечномерного слоя \mathbb{R}^n векторное расслоение ξ называется *конечномерным*, при этом говорят, что размерность векторного расслоения равна n ($\dim \xi = n$). В случае, когда слоем является бесконечномерное банахово пространство, векторное расслоение называется *бесконечномерным*.

Векторные расслоения отличаются рядом особенностей. Прежде всего отметим, что в каждом слое $p^{-1}(x), x \in B$, имеется структура векторного пространства, не зависящая от выбора координатного гомеоморфизма.

Другими словами, операции сложения векторов и умножения вектора на вещественное число не зависят от выбора координатного гомеоморфизма. В самом деле, поскольку структурная группа G равна $GL(n, \mathbb{R})$, то функции склейки

$$\varphi_{\beta\alpha}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

являются линейными отображениями по второму сомножителю. Значит, линейная комбинация векторов отображается с помощью отображения $\varphi_{\beta\alpha}$ в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами.

Следовательно, если через ξ обозначить векторное расслоение, а через $\Gamma(\xi)$ — множество всех сечений расслоения ξ , то множество $\Gamma(\xi)$ автомати-

чески наделяется структурой (вообще говоря, бесконечномерного) векторного пространства. Если $p: E \rightarrow B$ — векторное расслоение ξ , $s_1, s_2: B \rightarrow E$ — два сечения, то полагаем

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad x \in B, \quad (1)$$

$$(\lambda s_1)(x) = \lambda(s_1(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in B. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) как раз и задают в пространстве $\Gamma(\xi)$ структуру векторного пространства.

Отметим, что всякое сечение $s: B \rightarrow E$ можно описать в локальных терминах. Пусть $\{U_\alpha\}$ — атлас, $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ — координатные гомеоморфизмы, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$. Тогда композиции

$$\varphi_\alpha^{-1} s: U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

являются сечениями тривиальных расслоений над U_α и задают векторнозначные функции $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(\varphi_\alpha^{-1} s)(x) = (x, s_\alpha(x)), \quad x \in U_\alpha.$$

Эти функции $s_\alpha(x)$ на пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta$ удовлетворяют условию согласования

$$s_\beta(x) = \varphi_{\beta\alpha}(x)(s_\alpha(x)).$$

Обратно, если задан набор непрерывных векторнозначных функций $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию согласования на пересечении карт, то формула

$$s(x) = \varphi_\alpha(x, s_\alpha(x))$$

однозначно (т.е. независимо от выбора карты U_α) определяет отображение $s: B \rightarrow E$, являющееся сечением расслоения ξ .

Операции прямой суммы и тензорного произведения. Над векторными расслоениями (над одной базой B) можно производить операции, аналогичные операциям прямой суммы и тензорного произведения векторных пространств. Рассмотрим сначала операцию прямой суммы векторных расслоений. Пусть заданы два векторных расслоения ξ_1 и ξ_2 , слоями которых являются соответственно пространства V_1 и V_2 . Пусть функции склейки, определяющие расслоения ξ_1 и ξ_2 , в некотором атласе обозначены через $\varphi_{\alpha\beta}^1(x)$, $\varphi_{\alpha\beta}^2(x)$. Значения $\varphi_{\alpha\beta}^1(x)$ принимаются в группе $GL(V_1)$ линейных преобразований пространства V_1 , а значения $\varphi_{\alpha\beta}^2(x)$ принимаются в группе $GL(V_2)$ линейных преобразований пространства V_2 . Функции $\varphi_{\alpha\beta}^1(x)$, $\varphi_{\alpha\beta}^2(x)$ можно представлять себе матричнозначными функциями порядков, равных соответственно $n_1 = \dim V_1$ и $n_2 = \dim V_2$. Как функции $\varphi_{\alpha\beta}^1(x)$, так и $\varphi_{\alpha\beta}^2(x)$ должны удовлетворять условиям (1) из § 2.

Образуем новое пространство $V = V_1 \oplus V_2$. Группа его линейных преобразований $GL(V)$ является множеством всех обратимых квадратных матриц порядка $n = n_1 + n_2$, которые можно разложить на блоки в соответствии с разложением самого пространства V в прямую сумму $V_1 \oplus V_2$. Тогда группа $GL(V)$ содержит в качестве подгруппы группу $GL(V_1) \oplus GL(V_2)$, элементы которой имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = A_1 \oplus A_2,$$

$$A_1 \in GL(V_1), \quad A_2 \in GL(V_2).$$

Построим новые функции склейки

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha\beta}^1(x) \oplus \varphi_{\alpha\beta}^2(x) = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_{\alpha\beta}^1(x) & 0 \\ 0 & \varphi_{\alpha\beta}^2(x) \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Функции склейки (3) тоже удовлетворяют условиям (1) § 2, т.е. определяют некоторое векторное расслоение со слоем $V = V_1 \oplus V_2$. Построенное таким образом расслоение будем называть *прямой суммой векторных расслоений* ξ_1 и ξ_2 и обозначать через $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$.

Операцию прямой суммы векторных расслоений можно построить геометрическим путем. Пусть $p_1: E_1 \rightarrow B$ — векторное расслоение ξ_1 , а $p_2: E_2 \rightarrow B$ — векторное расслоение ξ_2 . Рассмотрим декартово произведение тотальных пространств $E_1 \times E_2$ и его проекцию

$$p_3 = p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B \times B$$

на декартово произведение баз $B \times B$. Очевидно, что p_3 является векторным расслоением со слоем $V = V_1 \oplus V_2$. Рассмотрим в базе $B \times B$ диагональ, т.е. пространство Δ , составленное из точек вида (x, x) , $x \in B$. Диагональ Δ гомеоморфна пространству B . Тогда ограничение расслоения p_3 на диагональ $\Delta \approx B$ является векторным расслоением над базой B . Тотальное пространство E этого ограничения является подпространством $E \subset E_1 \times E_2$, состоящим из таких векторов (y_1, y_2) , что $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Нетрудно проверить, что для расслоения p_3 в качестве атласа можно взять множества вида $U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2}$, а функции склейки $\varphi_{(\beta_1 \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2)}(x, y)$ на пересечении двух карт $(U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2}) \cap (U_{\beta_1} \times U_{\beta_2})$ имеют вид

$$\varphi_{(\beta_1 \beta_2)(\alpha_1 \alpha_2)}(x, y) = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_{\beta_1 \alpha_1}^1(x) & 0 \\ 0 & \varphi_{\beta_2 \alpha_2}^2(y) \end{array} \right\|.$$

Поэтому на диагонали $\Delta \approx B$ атлас состоит из множеств $U_\alpha \approx \Delta \cap (U_\alpha \times U_\alpha)$. Тогда функции склейки для ограничения расслоения p_3 на диагональ имеют вид

$$\varphi_{(\beta\beta)(\alpha\alpha)}(x, x) = \left\| \begin{array}{cc} \varphi_{\alpha\beta}^1(x) & 0 \\ 0 & \varphi_{\beta\alpha}^2(x) \end{array} \right\|,$$

т.е. совпадают с функциями склейки, определенными для прямой суммы расслоений ξ_1 и ξ_2 .

Перейдем теперь к определению тензорного произведения векторных расслоений. Пусть, как и раньше, ξ_1, ξ_2 — два векторных расслоения со слоями V_1 и V_2 , $\varphi_{\alpha\beta}^1(x), \varphi_{\alpha\beta}^2(x)$ — функции склейки расслоений ξ_1 и ξ_2 , $\varphi_{\alpha\beta}^1(x) \in GL(V_1)$, $\varphi_{\alpha\beta}^2(x) \in GL(V_2)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$, тогда паре матриц $A_1 \in GL(V_1)$, $A_2 \in GL(V_2)$ соответствует их тензорное произведение $A_1 \oplus A_2 \in GL(V_1 \oplus V_2)$. Положим

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha\beta}^1(x) \otimes \varphi_{\alpha\beta}^2(x).$$

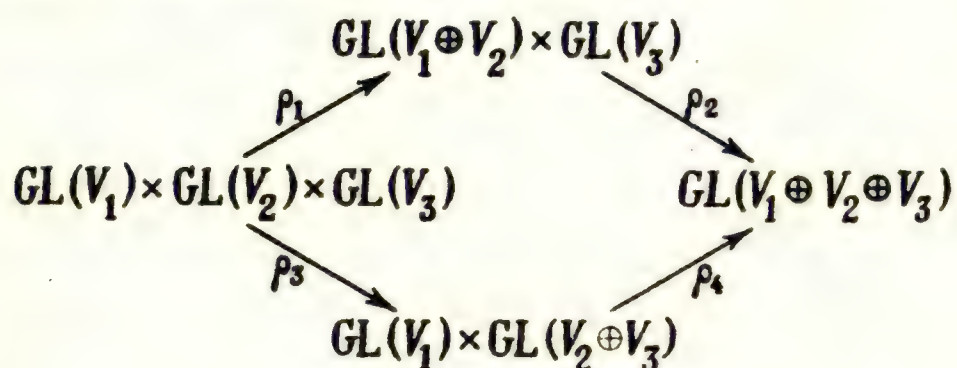
Получим набор матричнозначных функций $\varphi_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющих условиям (1) из § 2. Соответствующее векторное расслоение ξ со слоем $V = V_1 \otimes V_2$ и функциями склейки $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ будем называть *тензорным произведением* расслоений ξ_1 и ξ_2 и обозначим его через $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$.

Что общего в построении операций прямой суммы и тензорного произведения? Обе операции можно представить как результат применения к

паре векторных расслоений ξ_1 и ξ_2 следующей последовательности операций: а) переход к главным $GL(V_1)$ - и $GL(V_2)$ -расслоениям; б) построение главного $(GL(V_1) \times GL(V_2))$ -расслоения над декартовым квадратом базы $B \times B$; в) переход к ограничению главного $(GL(V_1) \times GL(V_2))$ -расслоения на диагональ, гомеоморфную пространству B ; г) наконец, переход к новому главному расслоению с помощью представления структурной группы $GL(V_1) \times GL(V_2)$ в группах $GL(V_1 \oplus V_2)$ и $GL(V_1 \otimes V_2)$. Различие между операциями прямой суммы и тензорного произведения возникает при выборе представления группы $GL(V_1) \times GL(V_2)$. С помощью различных представлений структурных групп можно строить и другие операции над векторными расслоениями. При этом, если для представлений выполнены некоторые алгебраические соотношения, то и для соответствующих операций над расслоениями тоже выполняются такие же алгебраические соотношения.

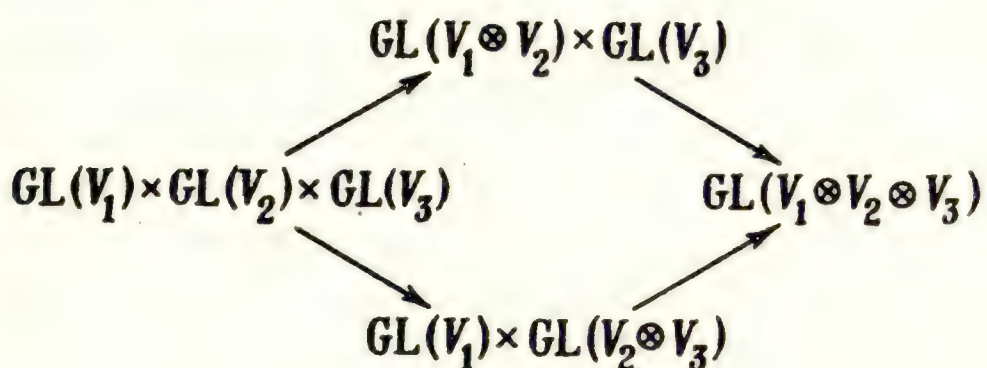
В частности, для операций прямой суммы и тензорного произведения выполнены следующие очевидные соотношения:

1) $(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 = \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$. Это соотношение следует из коммутативности следующей диаграммы:



где $\rho_1(A_1, A_2, A_3) = (A_1 \oplus A_2, A_3)$, $\rho_2(B, A_3) = B \oplus A_3$, $\rho_3(A_1, A_2, A_3) = (A_1, A_2 \oplus A_3)$, $\rho_4(A_1, C) = A_1 \oplus C$. Тогда $\rho_2 \rho_1(A_1, A_2, A_3) = (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3$, $\rho_4 \rho_3(A_1, A_2, A_3) = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$. Очевидно, что $\rho_2 \rho_1 = \rho_4 \rho_3$, поскольку соотношение $(A_1 \oplus A_2) \oplus A_3 = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$ выполняется для матриц.

2) $(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 = \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3)$. Это соотношение следует из коммутативности диаграммы отображений



которая в свою очередь следует из соотношения $(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 = A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)$ для матриц.

3) $(\xi_1 \oplus \xi_2) \otimes \xi_3 = (\xi_1 \otimes \xi_3) \oplus (\xi_2 \otimes \xi_3)$. Это свойство следует из соотношения $(A_1 \oplus A_2) \otimes A_3 = (A_1 \otimes A_3) \oplus (A_2 \otimes A_3)$ для матриц.

4) Тривиальное векторное расслоение со слоем R^n будем обозначать через \bar{n} . Поскольку тотальное пространство тривиального расслоения гомеоморфно декартову произведению $B \times R^n$, то $\bar{n} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \dots \oplus \bar{1}$ (n раз). Для тривиальных расслоений выполнены соотношения $\xi \otimes \bar{1} = \xi$, $\xi \otimes \bar{n} = \xi \oplus \xi \oplus \dots \oplus \xi$ (n раз).

Другие операции над векторными расслоениями. Пусть $V = \text{Hom}(V_1, V_2)$ — векторное пространство линейных отображений пространства V_1 в прост-

пространство V_2 . В случае бесконечномерных пространств будем дополнительно требовать ограниченность линейных отображений.

Тогда имеется естественное представление группы $GL(V_1) \times GL(V_2)$ в группе $GL(V)$, которое паре $A_1 \in GL(V_1); A_2 \in GL(V_2)$ сопоставляет отображение

$$\rho(A_1, A_2): \text{Hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{Hom}(V_1, V_2)$$

по формуле

$$\rho(A_1, A_2)(f) = A_2 \circ f \circ A_1^{-1}. \quad (4)$$

Тогда, следуя общему способу построения операций для расслоений, мы получаем для каждой пары расслоений ξ_1 и ξ_2 со слоями V_1 и V_2 и функциями склейки $\varphi_{\alpha\beta}^1(x)$, $\varphi_{\alpha\beta}^2(x)$ новое расслоение со слоем V и функциями склейки

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \rho(\varphi_{\alpha\beta}^1(x), \varphi_{\alpha\beta}^2(x)). \quad (5)$$

Это расслоение мы обозначим через $\text{HOM}(\xi_1, \xi_2)$. Если $V_2 = \mathbb{R}^1$, то пространство $\text{Hom}(V_1, \mathbb{R}^1)$ обычно обозначается через V_1^* . Соответственно с этим, если $\xi_2 = \bar{1}$, то расслоение $\text{HOM}(\xi, \bar{1})$ будем обозначать через ξ^* и называть *сопряженным расслоением*. Легко проверить, что если отождествить пространства V и V^* , то расслоение ξ^* строится из расслоения ξ с помощью представления группы $GL(V)$ в себя, задаваемого в матричном виде формулой

$$A \rightarrow (A^t)^{-1}, \quad A \in GL(V).$$

Для пространств V и V^* имеется билинейное отображение $V \times V^* \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^1$, сопоставляющее паре (x, h) значение $h(x)$ функционала h на векторе x . Зададим действие группы $GL(V)$ на пространстве $V \times V^*$ матрицей

$$\left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & \rho(A, 1) \end{array} \right\|$$

(см. (4)). Тогда для векторного расслоения $\xi \oplus \xi^*$ со слоем $V \times V^*$ структурная группа $GL(V \times V^*)$ редуцируется к подгруппе $GL(V)$. Действие же группы $GL(V)$ на $V \times V^*$ таково, что отображение β эквивариантно относительно тривиального действия группы $GL(V)$ на \mathbb{R}^1 . Этот факт означает, что значение формы на векторе не зависит от выбора линейной системы координат в пространстве V . Следовательно, вместе с расслоением $\xi \oplus \xi^*$ можно построить расслоение η с той же структурной группой $GL(V)$ и новым слоем \mathbb{R}^1 и непрерывное отображение $\bar{\beta}: \xi \oplus \xi^* \rightarrow \eta$, которое по-слойно изоморфно с β . Поскольку группа $GL(V)$ тривиально действует на \mathbb{R}^1 , то расслоение η является тривиальным одномерным расслоением, т.е. $\eta = \bar{1}$.

Таким образом, получим естественное билинейное отображение $\xi \oplus \xi^* \rightarrow \bar{1}$, являющееся аналогом соответствующего билинейного отображения для линейных пространств.

Пусть $\Lambda_k(V)$ — внешняя степень векторного пространства V . Тогда по каждому преобразованию $A: V \rightarrow V$ в алгебре строится внешняя степень преобразования $\Lambda_k(A): \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda_k(V)$, т.е. представление $\Lambda_k: GL(V) \rightarrow GL(\Lambda_k(V))$. Соответствующую операцию для векторных расслоений мы будем называть *операцией внешней степени* и результат операции внешней степени обозначать через $\Lambda_k(\xi)$. Так же, как и для векторных прост-

ранств, для векторных расслоений справедливы соотношения

$$\Lambda_1(\xi) = \xi, \quad \Lambda_k(\xi) = 0 \quad \text{для} \quad k > \dim \xi, \quad (6)$$

$$\Lambda_k(\xi_1 \oplus \xi_2) = \bigoplus_{\alpha=0}^k \Lambda_\alpha(\xi_1) \otimes \Lambda_{k-\alpha}(\xi_2), \quad (7)$$

где по определению $\Lambda_0(\xi) = \bar{1}$.

Соотношение (7) удобно записывать одной формулой. Для этого введем формальный многочлен

$$\Lambda_t(\xi) = \Lambda_0(\xi) + \Lambda_1(\xi)t + \Lambda_2(\xi)t^2 + \dots + \Lambda_n(\xi)t^n.$$

Тогда

$$\Lambda_t(\xi_1 \oplus \xi_2) = \Lambda_t(\xi_1) \otimes \Lambda_t(\xi_2). \quad (8)$$

Формулу (8) нужно понимать следующим образом: степени формальной переменной t при перемножении складываются, а коэффициенты — векторные расслоения — перемножаются тензорно.

Отображения векторных расслоений. Рассмотрим два векторных расслоения ξ_1 и ξ_2 . Обозначим их тотальные пространства через E_i , проекции через p_i , слои через V_i , $i = 1, 2$. Рассмотрим послойное отображение

$$f: E_1 \rightarrow E_2.$$

Если на каждом слое отображение f является линейным, то отображение f будем называть *линейным отображением векторных расслоений* или *гомоморфизмом расслоений*. Множество всех линейных отображений будем обозначать через $\text{Hom}(\xi_1, \xi_2)$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\text{Hom}(\xi_1, \xi_2) = \Gamma(\text{НОМ}(\xi_1, \xi_2)). \quad (9)$$

Интуитивно соотношение (9) очевидно, поскольку элементы левой и правой частей суть семейства линейных преобразований слоя V_1 в слой V_2 , параметризованные точками базы x . Для того чтобы доказать равенство (9), опишем элементы пространств в левой и правой частях соотношения (9) в локальных координатах. Формируем атлас $\{U_\alpha\}$ в базе B и координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha^1, \varphi_\alpha^2$ расслоений ξ_1 и ξ_2 . По линейному отображению $f: E_1 \rightarrow E_2$ строим семейство отображений

$$(\varphi_\alpha^2)^{-1} f \varphi_\alpha^1: U_\alpha \times V_1 \rightarrow U_\alpha \times V_2,$$

$$[(\varphi_\alpha^2)^{-1} f \varphi_\alpha^1](x, h) = (x, f_\alpha(x)h),$$

где $f_\alpha(x): V_1 \rightarrow V_2$ — непрерывное семейство линейных отображений, параметризованных точками $x \in U_\alpha$. Семейства $f_\alpha(x), f_\beta(x)$ на пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta$ связаны следующими зависимостями:

$$\varphi_{\beta\alpha}^2(x) f_\alpha(x) = f_\beta(x) \varphi_{\beta\alpha}^1(x),$$

т.е.

$$f_\beta(x) = \varphi_{\beta\alpha}^2(x) f_\alpha(x) \varphi_{\alpha\beta}^1(x).$$

Учитывая определения (4) и (5), получаем, что

$$f_\beta(x) = \varphi_{\beta\alpha}(x)(f_\alpha(x)). \quad (10)$$

Другими словами, набор функций $f_\alpha(x) \in V = \text{Hom}(V_1, V_2), x \in U_\alpha$, удовлетворяет условиям (10), т.е. задает сечение расслоения $\text{НОМ}(\xi_1, \xi_2)$. Обратно, если задано сечение расслоения $\text{НОМ}(\xi_1, \xi_2)$, т.е. набор функций $f_\alpha(x)$, удовлетворяющих условиям (10), то оно задает линейное отображение расслоения ξ_1 в расслоение ξ_2 .

В частности, если $\xi_1 = \bar{1}$, $V_1 = \mathbb{R}^1$, то $\text{Hom}(V_1, V_2) = V_2$, значит, $\text{Hom}(\bar{1}, \xi_2) = \xi_2$. Следовательно, $\Gamma(\xi_2) = \text{Hom}(\bar{1}, \xi_2)$, т.е. пространство сечений векторного расслоения ξ_2 можно отождествить с пространством всех линейных отображений одномерного тривиального расслоения $\bar{1}$ в расслоение ξ_2 .

Второй пример отображений векторных расслоений дает нам аналог билинейной формы на векторном пространстве. Билинейная форма — это отображение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}^1$, линейное по каждому аргументу. Если теперь задать семейство билинейных форм, параметризованных точками базы, то мы приходим к определению билинейной формы на векторном расслоении: послойное непрерывное отображение

$$f: \xi \oplus \xi \rightarrow \bar{1}$$

расслоения $\xi \oplus \xi$ в одномерное тривиальное расслоение, которое в каждом слое является билинейной формой, называется *билинейной формой на векторном расслоении*.

Так же, как и в случае линейных пространств, всякая билинейная форма $f: \xi \oplus \xi \rightarrow \bar{1}$ порождает линейное отображение расслоения ξ в сопряженное к нему расслоение ξ^* , скажем, $\bar{f}: \xi \rightarrow \xi^*$, так, чтобы отображение f получалось как композиция

$$\xi \oplus \xi \xrightarrow{\bar{f} \oplus \text{id}} \xi^* \oplus \xi \xrightarrow{\beta} \bar{1},$$

где $\text{id}: \xi \rightarrow \xi$ — тождественное отображение, а $\bar{f} \oplus \text{id}$ строится как прямая сумма отображений \bar{f} и id на каждом слое.

В случае, когда билинейная форма f на расслоении симметрична, невырождена и положительно определена в каждом слое, то говорят, что задано *скалярное произведение в расслоении ξ* .

Т е о р е м а 1. В любом конечномерном векторном расслоении ξ над компактной базой B существует скалярное произведение, т.е. невырожденная симметрическая положительно определенная билинейная форма на расслоении ξ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Скалярное произведение в расслоении ξ — это послойное отображение $f: \xi \oplus \xi \rightarrow \bar{1}$, которое в каждом слое является билинейной симметрической невырожденной положительно определенной формой. Это значит, что если $x \in B$, $v_1, v_2 \in p^{-1}(x)$, то $f(v_1, v_2)$ можно отождествить с вещественным числом, причем $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$, а если $v \neq 0$, $v \in p^{-1}(x)$, то $f(v, v) > 0$. Рассмотрим более слабое условие $f(v, v) \geq 0$. Тогда получаем неотрицательно определенную билинейную форму на расслоении ξ . Если f_1, f_2 — две такие неотрицательно определенные билинейные формы на расслоении ξ , то их сумма $f_1 + f_2$, а также линейная комбинация $\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2$, где φ_1 и φ_2 — непрерывные неотрицательные функции на базе B , тоже являются неотрицательно определенными формами.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — атлас расслоения ξ . Каждое ограничение $\xi|_{U_\alpha}$ является тривиальным векторным расслоением, т.е. расслоением, изоморфным декартову произведению $U_\alpha \times V$, где V — слой расслоения ξ . Поэтому расслоение $\xi|_{U_\alpha}$ имеет невырожденную положительно определенную билинейную форму $f_\alpha: \xi|_{U_\alpha} \oplus \xi|_{U_\alpha} \rightarrow \bar{1}$, т.е. если $v \in p^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha$, то $f_\alpha(v, v) > 0$. Пусть $\{g_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу $\{U_\alpha\}$, т.е. такой набор функций на базе B , что $0 \leq g_\alpha(x) \leq 1$, $\sum_\alpha g_\alpha(x) \equiv 1$,

$\text{Supp } g_\alpha \subset U_\alpha$. Тогда форма \bar{f}_α , задаваемая равенством

$$\bar{f}_\alpha(v_1, v_2) = \begin{cases} g_\alpha(x) f_\alpha(v_1, v_2), & v_1, v_2 \in p^{-1}(x), \quad x \in U_\alpha, \\ 0, & v_1, v_2 \in p^{-1}(x), \quad x \notin U_\alpha, \end{cases}$$

определена и непрерывна на всем расслоении ξ и неотрицательно определена. Положим

$$f(v_1, v_2) = \sum_{\alpha} f_\alpha(v_1, v_2).$$

Покажем, что форма f является положительно определенной. Пусть $0 \neq v \in p^{-1}(x)$. Существует такой номер α , что $g_\alpha(x) > 0$. Тогда $x \in U_\alpha$ и $f_\alpha(v, v) > 0$. Следовательно, $\bar{f}_\alpha(v, v) > 0$, а значит, и $f(v, v) > 0$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. Для любого векторного расслоения ξ над компактной базой B , $\dim \xi = n$, структурная группа $GL(n, R)$ редуцируется к подгруппе $O(n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Придадим другую геометрическую интерпретацию тому факту, что расслоение ξ локально тривиально. Пусть U_α — карта, $\varphi_\alpha: U_\alpha \times V \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ — тривиализирующий координатный гомеоморфизм. Тогда, задав любой вектор $v \in V$, можно построить сечение расслоения ξ над картой U_α :

$$\sigma: U_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha),$$

$$\sigma(x) = \varphi_\alpha(x, v) \in p^{-1}(U_\alpha).$$

Если v_1, \dots, v_n — базис в пространстве V , то соответствующие сечения $\sigma_k^\alpha(x) = \varphi_\alpha(x, v_k)$ образуют такую систему сечений, что набор векторов $\sigma_1^\alpha(x), \dots, \sigma_n^\alpha(x) \in p^{-1}(x)$ является базисом в слое $p^{-1}(x)$. Обратно, если система сечений $\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_n^\alpha: U_\alpha \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ в каждом слое $p^{-1}(x)$ образует линейный базис, то с ее помощью восстанавливается тривиализирующий координатный гомеоморфизм

$$\varphi_\alpha(x, \sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i \sigma_i^\alpha(x) \in p^{-1}(U_\alpha).$$

Легко понять, что такое функция склейки $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$. Это матрица перехода от базиса $\{\sigma_1^\alpha(x), \dots, \sigma_n^\alpha(x)\}$ к базису $\{\sigma_1^\beta(x), \dots, \sigma_n^\beta(x)\}$ в слое $p^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Таким образом, теорема 2 будет полностью доказана, если нам удастся построить в каждой карте U_α систему сечений $\{\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_n^\alpha\}$, которые в каждом слое $p^{-1}(x)$ образуют ортонормированный базис относительно некоторого скалярного произведения в расслоении ξ . Тогда матрицы перехода от одного базиса $\{\sigma_1^\alpha(x), \dots, \sigma_n^\alpha(x)\}$ к другому базису $\{\sigma_1^\beta(x), \dots, \sigma_n^\beta(x)\}$, очевидно, будут ортогональными, т.е. $\varphi_{\beta\alpha}(x) \in O(n)$. Теперь доказательство теоремы 2 завершается следующей леммой.

Л е м м а. Пусть ξ — векторное расслоение, f — скалярное произведение в расслоении ξ , $\{U_\alpha\}$ — атлас расслоения ξ . Для каждой карты U_α существует система сечений $\{\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_n^\alpha\}$, образующая в каждом слое $p^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha$, ортонормированный базис.

Доказательство леммы в точности повторяет метод Грама — Шмидта построения ортонормированного базиса. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_n: U_\alpha \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ —

произвольная система сечений, образующая базис в каждом слое $p^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha$. Тогда для любого $x \in U_\alpha$ имеем $\tau_1(x) \neq 0$ и, значит, $f(\tau_1(x), \tau_1(x)) > 0$. Положим тогда

$$\tau'_1(x) = \frac{\tau_1(x)}{\sqrt{f(\tau_1(x), \tau_1(x))}}.$$

Новая система сечений $\tau'_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ снова образует базис в каждом слое. Положим

$$\tau''_2(x) = \tau_2(x) - f(\tau_2(x), \tau'_1(x))\tau'_1(x).$$

Новая система сечений $\tau'_1, \tau''_2, \tau_3, \dots, \tau_n$ снова образует базис, причем вектор $\tau'_1(x)$ имеет длину, равную единице, и ортогонален вектору $\tau''_2(x)$ в каждой точке $x \in U_\alpha$. Значит, в частности, $\tau''_2(x) \neq 0$. Положим

$$\tau'_2(x) = \frac{\tau''_2(x)}{\sqrt{f(\tau''_2(x), \tau''_2(x))}}.$$

Система сечений $\tau'_1, \tau'_2, \tau_3, \dots, \tau_n$ снова образует базис, причем векторы $\tau'_1(x), \tau'_2(x)$ ортонормированы. Далее перестраиваем систему сечений по индукции. Пусть построены сечения $\tau'_1, \dots, \tau'_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n$, образующие базис в каждом слое, а векторы $\tau'_1(x), \dots, \tau'_k(x)$ ортонормированы. Положим

$$\tau''_{k+1}(x) = \tau_{k+1}(x) - \sum_{i=1}^k f(\tau_{k+1}(x), \tau'_i(x))\tau'_i(x),$$

$$\tau'_{k+1}(x) = \frac{\tau''_{k+1}(x)}{\sqrt{f(\tau''_{k+1}(x), \tau''_{k+1}(x))}}.$$

Тогда система сечений $\tau'_1, \dots, \tau'_{k+1}, \tau_{k+2}, \dots, \tau_n$ образует базис в каждом слое $p^{-1}(x)$, а векторы $\tau'_1(x), \dots, \tau'_{k+1}(x)$ ортонормированы. Лемма доказана по индукции, а вместе с ней доказана и теорема 2.

З а м е ч а н и е 1. В лемме доказано несколько более сильное утверждение: если $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ — система сечений расслоения ξ в карте U_α , образующая базис в каждом слое $p^{-1}(x)$, причем векторы $\{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)\}$ ортонормированы, то существуют такие сечения $\{\tau'_{k+1}, \dots, \tau'_n\}$, что векторы

$$\{\tau_1(x), \dots, \tau_k(x), \tau'_{k+1}(x), \dots, \tau'_n(x)\}$$

образуют ортонормированный базис в каждом слое $p^{-1}(x)$. Другими словами, если ортонормированная система сечений дополняется до базиса сечений, то ее же можно дополнить и до ортонормированного базиса сечений.

З а м е ч а н и е 2. В условиях теорем 1 и 2 условие компактности базы B можно заменить на условие паракомпактности базы B . Тогда в качестве атласа следует выбирать локально конечный атлас.

§ 4. Линейные преобразования расслоений

Многие понятия и свойства линейных отображений векторных пространств переносятся на случай гомоморфизмов, т.е. линейных отображений векторных расслоений. Ряд этих важных свойств мы рассмотрим в данном параграфе.

Фиксируем векторное расслоение ξ с базой B . Будем считать, если это будет необходимо, что расслоение ξ снабжено скалярным произведением, значение которого на паре векторов $v_1, v_2 \in p^{-1}(x)$ будем обозначать через $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Рассмотрим гомоморфизм $f: \xi \rightarrow \xi$ векторного расслоения ξ в себя. С любыми двумя такими гомоморфизмами $f_1, f_2: \xi \rightarrow \xi$ можно производить следующие операции.

Операции сложения $f_1 + f_2: \xi \rightarrow \xi$ и умножения гомоморфизма на функцию превращают множество $\text{Hom}(\xi, \xi)$ в линейное пространство, являющееся модулем над алгеброй $C(B)$ непрерывных функций, определенных на базе B .

Операция композиции $f_1 \circ f_2: \xi \rightarrow \xi$ превращает пространство $\text{Hom}(\xi, \xi)$ в алгебру. Если использовать скалярное произведение в расслоении ξ , то алгебру $\text{Hom}(\xi, \xi)$ можно снабдить нормой и превратить ее в банахову алгебру. Действительно, пусть $f: \xi \rightarrow \xi$ — некоторое линейное отображение, а через $\|v\|$ обозначена норма вектора $v \in p^{-1}(x)$, т.е. $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$. Тогда положим

$$\|f\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}. \quad (1)$$

Пространство $\text{Hom}(\xi, \xi)$ является полным пространством относительно нормы (1). В самом деле, если последовательность линейных отображений $f_n: \xi \rightarrow \xi$ фундаментальна, т.е. $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$, то при фиксирован-

ном векторе $v \in p^{-1}(x)$ последовательность $f_n(v) \in p^{-1}(x)$ тоже фундаментальна, поскольку $\|f_n(v) - f_m(v)\| \leq \|f_n - f_m\| \|v\|$. Следовательно, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(v)$, который мы обозначим через $f(v)$. Полу-

ченное отображение $f: \xi \rightarrow \xi$ является, очевидно, линейным. Чтобы показать его непрерывность, следует перейти к отображениям

$$h_{n, \alpha} = \varphi_\alpha^{-1} f_n \varphi_\alpha: U_\alpha \times V \rightarrow U_\alpha \times V,$$

которые задаются матричнозначными функциями на U_α . Коэффициенты этих матриц образуют фундаментальные последовательности в равномерной норме, и поэтому предельные значения являются непрерывными функциями, что и означает непрерывность отображения f .

Используя скалярное произведение, каждому линейному отображению $f: \xi \rightarrow \xi$ можно сопоставить сопряженное отображение f^* по формуле

$$\langle f^*(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle, \quad v_1, v_2 \in p^{-1}(x).$$

Доказательство существования и непрерывности линейного отображения f^* оставляем читателю в качестве упражнения.

Комплексные расслоения. Тожественное отображение расслоения ξ в себя будем обозначать через 1. Пусть задано линейное отображение $I: \xi \rightarrow \xi$, удовлетворяющее условию $I^2 = -1$. Тогда на каждом слое $p^{-1}(x)$ индуци-

руется преобразование $I_x = I|p^{-1}(x)$, поскольку $I(p^{-1}(x)) \subset p^{-1}(x)$, причем $I_x^2 = -1$. Следовательно, преобразование I_x задает на векторном пространстве $p^{-1}(x)$ структуру комплексного векторного пространства. В частности, $\dim V = 2n$.

Покажем, что в этом случае структурная группа $GL(2n, \mathbb{R})$ редуцируется к подгруппе комплексных преобразований $GL(n, \mathbb{C})$. Заметим, что если в комплексном векторном пространстве V , $\dim V = 2n$, задано n таких векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$, что система векторов $\{v_1, \dots, v_n, Iv_1, \dots, Iv_n\}$ образует вещественный базис, то векторы $\{v_1, \dots, v_n\}$ образуют комплексный базис пространства V .

Фиксируем точку x_0 . Поскольку $p^{-1}(x_0)$ является комплексным пространством относительно оператора I_{x_0} , то существует комплексный базис $\{v_1, \dots, v_n\} \subset p^{-1}(x_0)$. Пусть $U_\alpha \ni x_0$ — некоторая карта расслоения ξ и τ_1, \dots, τ_n — такие сечения в карте U_α , что $\tau_k(x_0) = v_k$. Тогда сечения $\{\tau_1, \dots, \tau_n, I\tau_1, \dots, I\tau_n\}$ образуют базис в слое $p^{-1}(x_0)$, а следовательно, и в слое $p^{-1}(x)$ в достаточно малой окрестности $U \ni x_0$. Поэтому векторы $\{\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)\}$ образуют комплексный базис в каждом слое $p^{-1}(x)$, $x \in U$. Переходя к более мелкому атласу, построим в каждой карте U_α систему сечений $\{\tau_1^\alpha(x), \dots, \tau_n^\alpha(x)\}$, образующую комплексный базис в каждом слое $p^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha$. Фиксируем в пространстве \mathbb{C}^n комплексный базис e_1, \dots, e_n и положим

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{C}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha),$$

$$\varphi_\alpha(x, \sum_{k=1}^n z_k e_k) = \sum_{k=1}^n u_k \tau_k^\alpha(x) + \sum_{k=1}^n v_k I_\alpha(\tau_k^\alpha(x)) = \sum_{k=1}^n z_k \tau_k^\alpha(x),$$

$$z_k = u_k + iv_k.$$

Тогда функции склейки $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$ задаются матрицей перехода от комплексного базиса $\{\tau_1^\alpha(x), \dots, \tau_n^\alpha(x)\}$ к комплексному базису $\{\tau_1^\beta(x), \dots, \tau_n^\beta(x)\}$. Эта матрица является комплексной, т.е. принадлежит группе $GL(n, \mathbb{C})$, что и требовалось доказать.

Векторное расслоение со структурной группой $GL(n, \mathbb{C})$ называется *комплексным векторным расслоением*.

Если ξ — вещественное векторное расслоение, то на сумме $\xi \oplus \xi$ естественно вводится структура комплексного расслоения с помощью линейного отображения

$$I: \xi \oplus \xi \rightarrow \xi \oplus \xi,$$

задаваемого формулой

$$I(v_1, v_2) = (-v_2, v_1), \quad v_1, v_2 \in p^{-1}(x).$$

Полученное таким образом комплексное расслоение называется *комплексификацией расслоения* ξ и обозначается через $c\xi$. Обратно, забывание структуры комплексного расслоения ξ превращает его в вещественное векторное расслоение. Соответствующая операция называется *овеществлением расслоения* ξ и обозначается через $r\xi$. Совершенно ясно, что

$$rc\xi = \xi \oplus \xi.$$

Описанные операции комплексификации и овеществления расслоений соответствуют естественным представлениям групп

$$c: GL(2n, R) \rightarrow GL(n, C),$$

$$r: GL(n, C) \rightarrow GL(2n, R).$$

Выясним теперь, как устроено комплексное расслоение $cr \xi$. Пусть ξ — комплексное расслоение, т.е. на нем задано линейное отображение $I: \xi \rightarrow \xi$, превращающее вещественное расслоение ξ в комплексное. Согласно определению расслоение $cr \xi$ можно представить как прямую сумму $\eta = \xi \oplus \xi$ с линейным отображением

$$I_1: \xi \oplus \xi \rightarrow \xi \oplus \xi, \quad I_1(v_1, v_2) = (-v_2, v_1).$$

Отображение I_1 задает в расслоении η новую комплексную структуру, отличную, вообще говоря, от комплексной структуры, которая задается отображением I . Разложим расслоение η в прямую сумму другим способом:

$$f: \xi \oplus \xi \rightarrow \xi \oplus \xi,$$

$$f(v_1, v_2) = (I(v_1 + v_2), v_1 - v_2).$$

Зададим в прообразе линейное преобразование

$$I_2(v_1, v_2) = (Iv_1, -Iv_2).$$

Тогда $fI_2 = I_1f$. Действительно,

$$fI_2(v_1, v_2) = f(Iv_1, -Iv_2) = (v_2 - v_1, I(v_1 + v_2)),$$

$$I_1f(v_1, v_2) = I_1(I(v_1 + v_2), v_1 - v_2) = (v_2 - v_1, I(v_1 + v_2)).$$

Таким образом, отображение f осуществляет изоморфизм комплексного расслоения $cr \xi$ (стоящего в образе) с суммой двух расслоений: комплексного расслоения ξ и второго слагаемого, гомеоморфного расслоению ξ , но комплексная структура в котором задается другим способом — с помощью операции I' , $I'(v) = -I(v)$. Эта новая комплексная структура на расслоении ξ обозначается через $\bar{\xi}$, а расслоение $\bar{\xi}$ называется *комплексно сопряженным к комплексному расслоению ξ* . Обратим внимание, что расслоения ξ и $\bar{\xi}$ изоморфны как вещественные расслоения, т.е. изоморфны над большей структурной группой $GL(2n, R)$, и не обязаны быть изоморфными над структурной группой $GL(n, C)$. Таким образом, мы получили формулу

$$cr \xi = \xi \oplus \bar{\xi}.$$

Следующее утверждение дает описание комплексно сопряженного расслоения в терминах функций склейки.

Предложение 1. Пусть $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \rightarrow GL(n, C)$ — функции склейки комплексного расслоения ξ . Тогда функции склейки $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$, задаваемые матрицами, комплексно сопряженными к матрицам $\varphi_{\beta\alpha}$, определяют комплексно сопряженное расслоение $\bar{\xi}$.

Доказательство. Пусть V — комплексное пространство размерности n с оператором I умножения на мнимую единицу. Обозначим через V' пространство V с комплексной структурой, задаваемой оператором $I' = -I$. Комплексный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве V является одновременно комплексным базисом в пространстве V' . Однако, если вектор $v \in V$ имеет комплексные координаты z_1, \dots, z_n , то тот же вектор v как

вектор в пространстве V' имеет координаты $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$. Если $\{f_1, \dots, f_n\}$ — другой базис, то комплексная матрица перехода от одной системы координат к другой задается путем разложения векторов $\{f_1, \dots, f_n\}$ по координатам в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Если для пространства V эти разложения суть $f_k = \sum_j z_{kj} e_j$, то для пространства V' эти разложения имеют вид $f_k = \sum_j \bar{z}_{kj} e_j$, что и доказывает предложение 1.

Предложение 2. Комплексное расслоение ξ представимо в виде $\xi = c\eta$ тогда и только тогда, когда существует такое вещественно линейное отображение $*$: $\xi \rightarrow \xi$, что $*^2 = 1$, $*I = -I*$, где I — операция умножения на мнимую единицу.

Достаточность мы докажем несколько позже. Что касается необходимости, то для расслоения $\xi = c\eta = \eta \oplus \eta$ зададим отображение $*$: $\eta \oplus \eta \rightarrow \eta \oplus \eta$ по формуле $*(v_1, v_2) = (v_1, -v_2)$. Отображение $*$ задает в каждом слое расслоения ξ операцию на векторах, называемую *операцией комплексного сопряжения*. Если для вектора v выполнено условие $*(v) = v$, то v называется *вещественным вектором*. Аналогично, сечение τ называется *вещественным*, если $*(\tau(x)) = \tau(x)$ для любого $x \in B$. Линейное преобразование f : $\xi \rightarrow \xi$ называется *вещественным*, если $*f* = f$. При вещественном преобразовании вещественные векторы отображаются в вещественные векторы.

Подрасслоения. Пусть f : $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ — линейное отображение векторных расслоений над одной базой B , причем послойное отображение f_x : $(\xi_1)_x \rightarrow (\xi_2)_x$ имеет постоянный ранг. Пусть $p_1: E_1 \rightarrow B$, $p_2: E_2 \rightarrow B$ — проекции расслоений ξ_1 и ξ_2 . Положим

$$E_0 = \{y \in E_1: f(y) = 0 \in p_2^{-1}(x), x = p_1(y)\}, \quad E = f(E_1).$$

Теорема 1. а) Отображение $p_0 = p_1|E_0: E_0 \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением, допускающим единственную структуру векторного расслоения ξ_0 , для которой вложение $E_0 \subset E_1$ является линейным отображением расслоений;

б) отображение $p = p_2|E: E \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением, допускающим единственную структуру векторного расслоения ξ , для которой вложение $E \subset E_2$ является линейным отображением расслоений, а отображение $f: E_1 \rightarrow E$ тоже является линейным отображением;

в) существует изоморфизм $\varphi: \xi_1 = \xi_0 \oplus \xi$, при котором отображение f переходит в проекцию на второе слагаемое;

г) существуют векторное расслоение η и изоморфизм $\psi: \xi_2 \rightarrow \xi \oplus \eta$. Расслоение ξ_0 называется *ядром* отображения f , $\xi_0 = \text{Ker } f$, а расслоение ξ называется *образом* отображения f , $\xi = \text{Im } f$. Таким образом, $\dim \xi_1 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

Доказательство теоремы 1. Будем предполагать, что в расслоениях ξ_1 и ξ_2 заданы скалярные произведения. Покажем сначала, что справедливо утверждение б), т.е. что отображение $p = p_2|E: E \rightarrow B$ является векторным расслоением. Достаточно показать, что для любой точки $x_0 \in B$ найдется карта $U \ni x_0$ и набор непрерывных сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_k: U \rightarrow E$, образующий в каждом пространстве $f_x(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$ линейный базис. Для этого фиксируем в пространстве $f_{x_0}(p_1^{-1}(x_0))$ базис e_1, \dots, e_k . Поскольку отображение $f_{x_0}: p_1^{-1}(x_0) \rightarrow f_{x_0}(p_1^{-1}(x_0))$ является эпиморфизмом, то существуют такие векторы $g_1, \dots, g_k \in p_1^{-1}(x_0)$, что $f_{x_0}(g_i) = e_i$, $1 \leq i \leq k$.

Так как ξ_1 является локально тривиальным расслоением, то найдется такая карта $U \ni x_0$, в которой расслоение ξ_1 изоморфно декартову произведению $U \times p_1^{-1}(x_0)$. Поэтому найдутся такие непрерывные сечения $\tau_1, \dots, \tau_k: U \rightarrow E_1$, что $\tau_i(x_0) = g_i$. Тогда сечения $\sigma_i = f(\tau_i)$ проходят через векторы e_i , т.е. $\sigma_i(x_0) = f(\tau_i(x_0)) = f(g_i) = e_i$. Поскольку сечения σ_i непрерывны, то найдется меньшая окрестность $U' \ni x_0$, во всех точках x которой векторы $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ образуют базис пространства $f_x(p_1^{-1}(x))$. Таким образом, мы показали, что E является тотальным пространством векторного расслоения, а вложение $E \subset E_2$ является линейным отображением. Единственность векторной структуры на расслоении E очевидна.

Обозначим через $P: \xi_1 \rightarrow \xi_1$ послойное отображение, которое на каждом слое $p_1^{-1}(x)$ является ортогональной проекцией на ядро $\text{Ker } f_x \subset p_1^{-1}(x)$. Покажем, что отображение P непрерывно. Достаточно проверить непрерывность отображения P отдельно над каждой картой U . Заметим, что ядро $\text{Ker } f_x$ является ортогональным дополнением к подпространству $\text{Im } f_x^*$. Поскольку ранг отображения f_x^* равен рангу отображения f_x , то мы находимся в условиях уже доказанной части теоремы, значит, образ $\text{Im } f^*$ является локально тривиальным векторным расслоением. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ — набор непрерывных сечений, $\sigma_i: U \rightarrow \text{Im } f^* \subset E_1$, образующих в каждой точке $x \in U$ базис пространства $\text{Im } f_x^* \subset p_1^{-1}(x)$. Тогда, если $g \in p_1^{-1}(x)$, то операция ортогонального проектирования вектора g на подпространство $\text{Ker } f_x$ заключается в разложении вектора g в линейную комбинацию

$$g = P(g) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x)$$

с условием, что $\langle P(g), \sigma_i(x) \rangle = 0$, т.е. $\langle g - \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x), \sigma_j(x) \rangle = 0$.

Для нахождения коэффициентов λ_i мы получаем систему линейных уравнений

$$\sum \lambda_i \langle \sigma_i(x), \sigma_j(x) \rangle = \langle g, \sigma_j(x) \rangle.$$

Матрица $\|\langle \sigma_i(x), \sigma_j(x) \rangle\|$, очевидно, невырождена, поэтому обратная матрица непрерывно зависит от переменной x , откуда следует, что коэффициенты λ_j непрерывно зависят от вектора g и точки x . Это доказывает непрерывность проектора P . Таким образом, $\text{Ker } f$ совпадает с образом $\text{Im } P$ отображения P . Поскольку ранг проектора P не зависит от точки x , то из утверждения б) следует утверждение а).

Утверждение в) следует из того, что расслоение ξ_1 изоморфно прямой сумме $\xi_0 \oplus \text{Im } f^*$, т.е. ограничение отображения f на второе слагаемое $\text{Im } f^*$ является изоморфизмом между $\text{Im } f^*$ и $\text{Im } f$.

Утверждение г) следует из того, что $\text{Ker } f^*$ тоже является векторным расслоением, $\xi_2 = \text{Ker } f^* \oplus \text{Im } f$.

Теорема 1 полностью доказана.

Используя теорему 1, закончим доказательство предложения 2. Пусть $*$: $\xi \rightarrow \xi$ — вещественно линейное отображение комплексного расслоения ξ , для которого выполнены соотношения $*^2 = 1$, $*I = -I*$. Пусть $p: E \rightarrow B$ — проекция расслоения ξ . Обозначим через E_0 подпространство векторов $g \in E$, для которых $*(g) = g$, а через E_1 — подпространство векторов $g \in E$, для которых $*(g) = -g$. Пусть $P: \xi \rightarrow \xi$ — отображение, яв-

ляющееся на каждом слое $p^{-1}(x)$ проекцией на подпространство $E_0 \cap p^{-1}(x)$ вдоль подпространства $E_1 \cap p^{-1}(x)$. Проекцию P можно выразить через отображение $*$ по формуле

$$P = \frac{1}{2} (1 + *). \quad (2)$$

В самом деле, если отображение P определить по формуле (2), то при $*(g) = g$ получаем $P(g) = g$, а при $*(g) = -g$ получаем $P(g) = 0$, т.е. P есть проектор на подпространство E_0 . Таким образом, отображение P является непрерывным, а ранг его равен в каждой точке одному и тому же числу — половине размерности расслоения ξ . Мы находимся в условиях теоремы 1. Поэтому расслоение ξ разлагается в прямую сумму двух вещественных расслоений: $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1$, причем отображение I удовлетворяет условиям

$$I(\xi_0) = \xi_1, \quad I(\xi_1) = \xi_0.$$

Поэтому отображение $I: \xi_0 \rightarrow \xi_1$ является изоморфизмом. Следовательно, $\xi = c\xi_0$. Предложение 2 полностью доказано.

Т е о р е м а 2. Пусть ξ — векторное расслоение над компактной базой B . Тогда существует такое векторное расслоение η над B , что прямая сумма $\xi \oplus \eta$ изоморфна тривиальному векторному расслоению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 1. Достаточно построить линейное отображение $f: \xi \rightarrow \bar{N}$, ранг которого в каждой точке равен $\dim \xi$. Если ξ — тривиальное расслоение, то такое отображение существует. Значит, для каждой карты U_α существует отображение

$$f_\alpha: \xi|U_\alpha \rightarrow N_\alpha, \quad \text{rank } f_\alpha = \dim \xi.$$

Пусть φ_α — конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Тогда отображение $\varphi_\alpha f_\alpha$ продолжается нулевым отображением до отображения $g_\alpha: \xi \rightarrow \bar{N}_\alpha$, причем $g_\alpha|U_\alpha = \varphi_\alpha f_\alpha$. Значит, если $\varphi_\alpha(x) \neq 0$, то $\text{rank } g_\alpha|_x = \dim \xi$. Положим

$$g: \xi \rightarrow \bigoplus_{\alpha} \bar{N}_\alpha = \bar{N},$$

$$g = \bigoplus g_\alpha, \quad \text{т.е. } g(Y) = (g_1(Y), \dots, g_\alpha(Y), \dots).$$

Очевидно, ранг отображения g в каждой точке равен максимальному рангу отображений g_α . Поскольку в каждой точке $x \in B$ найдется такое α , что $\varphi_\alpha(x) \neq 0$, то $\text{rank } g = \text{rank } g_\alpha|_x = \dim \xi$ не зависит от точки $x \in B$. Мы находимся в условиях теоремы 1. Имеем $\text{Ker } g = 0$, поэтому расслоение ξ изоморфно $\text{Im } g$ и $\text{Im } g \oplus \eta = \bar{N}$. Теорема 2 полностью доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть ξ_1, ξ_2 — два векторных расслоения над компактной базой B и $B_0 \subset B$ — замкнутое подпространство. Пусть $f_0: \xi_1|B_0 \rightarrow \xi_2|B_0$ — линейное отображение ограничений расслоений на подпространство B_0 . Тогда отображение f_0 допускает продолжение до линейного отображения $f: \xi_1 \rightarrow \xi_2$, $f|B_0 = f_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если расслоения ξ_1 и ξ_2 тривиальны, то задача сводится к построению продолжения матричнозначных функций, которая решается с помощью леммы Урысона о построении продолжения непрерывной вещественнозначной функции.

В общем случае применим теорему 2. Пусть η_1, η_2 — такие векторные расслоения, что расслоения $\xi_1 \oplus \eta_1$ и $\xi_2 \oplus \eta_2$ тривиальны. Пусть $g_0: \eta_1|B_0 \rightarrow \eta_2|B_0$ — нулевое отображение, $P: \xi_2 \oplus \eta_2 \rightarrow \xi_2$ — естественная проекция,

$Q: \xi_1 \rightarrow \xi_1 \oplus \eta_1$ — естественное вложение. Наконец, пусть

$$h_0 = f_0 \oplus g_0: (\xi_1 \oplus \eta_1)|_{B_0} \rightarrow (\xi_2 \oplus \eta_2)|_{B_0}$$

— прямая сумма отображений f_0 и g_0 . Так как расслоения $\xi_1 \oplus \eta_1$ и $\xi_2 \oplus \eta_2$ тривиальны, то существует линейное отображение $h: \xi_1 \oplus \eta_1 \rightarrow \xi_2 \oplus \eta_2$, продолжающее отображение h_0 . Положим $f = PhQ: \xi_1 \rightarrow \xi_2$. Ясно, что $f|_{B_0} = f_0$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 справедлива не только для компактных баз, но и для более общих пространств (например, паракомпактных), однако доказательство тогда несколько усложнится.

У п р а ж н е н и я

1. Пусть ξ_1, ξ_2 — два векторных расслоения над компактной базой B , $B_0 \subset B$ — замкнутое подпространство, $f_0: \xi_1|_{B_0} \rightarrow \xi_2|_{B_0}$ — послойный мономорфизм. Показать, что отображение f_0 продолжается до послойного мономорфизма $f: \xi_1|_U \rightarrow \xi_2|_U$ для некоторой открытой окрестности $U \supset B_0$.

2. В условиях предыдущего упражнения показать, что найдется тривиальное расслоение \bar{N} и послойный мономорфизм $g: \xi_1 \rightarrow \xi_2 \oplus \bar{N}$, продолжающий f_0 , т.е. $g|_{B_0} = (f_0, 0)$.

§ 5. Векторные расслоения, связанные с многообразиями

Наиболее естественным образом возникают векторные расслоения в теории гладких многообразий.

Напомним, что n -мерным многообразием называется метризуемое пространство X , у каждой точки $x \in X$ которого существует открытая окрестность $U \ni x$, гомеоморфная области V в n -мерном пространстве \mathbb{R}^n . Гомеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ называется *координатным гомеоморфизмом*, а координатные функции в линейном пространстве \mathbb{R}^n , отнесенные к точкам окрестности U , т.е. композиции $x^i = x^i \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^1$, называются *координатными функциями на многообразии X в окрестности U* . Система этих функций $\{x^1, \dots, x^n\}$, определенных в окрестности U , называется *локальной системой координат многообразия X* . Открытое подмножество U многообразия X вместе с фиксированной локальной системой координат на нем $\{x^1, \dots, x^n\}$ называется *картой*. Система карт $(U_\alpha, \{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\})$, покрывающая многообразие X , $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, называется *атласом* многообразия X .

Таким образом, каждое n -мерное многообразие обладает атласом. Если точка $x \in X$ принадлежит одновременно двум картам, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то в окрестности точки x мы имеем две локальные системы координат. При этом локальные координаты x_α^i одной карты функционально выражаются через значения локальных координат $\{x_\beta^1, \dots, x_\beta^n\}$ другой карты, т.е. существуют непрерывные функции $\varphi_{\alpha\beta}^k$, для которых

$$x_\alpha^k = \varphi_{\alpha\beta}^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n). \quad (1)$$

Функции $\varphi_{\alpha\beta}^k$ называются *функциями замены координат* или *функциями перехода от одной локальной системы координат к другой*. Для краткости вместо выражения (1) будем писать

$$x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n). \quad (2)$$

Если атлас $(U_\alpha, \{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\})$ выбран таким образом, что все функции замены координат являются гладкими функциями класса гладкости C^k , $1 \leq n \leq \infty$, то говорят, что на многообразии X задана *структура гладкого многообразия класса C^k* . Если все функции замены координат являются аналитическими функциями, то говорят, что на многообразии X задана *структура аналитического многообразия*.

Если $n = 2m$, $u_\alpha^k = x_\alpha^k$, $1 \leq k \leq m$, $v_\alpha^k = x_\alpha^{m+k}$, $1 \leq k \leq m$, $z_\alpha^k = u_\alpha^k + i v_\alpha^k$, а все функции $z_\alpha^k = \varphi_{\alpha\beta}^k(z_\beta^1, \dots, z_\beta^m) + i \varphi_{\alpha\beta}^{m+k}(z_\beta^1, \dots, z_\beta^m)$ являются комплексными аналитическими функциями в своей области определения, то говорят, что на многообразии X задана *структура комплексного аналитического многообразия*.

Мы, как правило, будем рассматривать бесконечно гладкие многообразия, т.е. гладкие многообразия класса C^∞ .

Отображение $f: X \rightarrow Y$ одного гладкого многообразия X в другое гладкое многообразие Y называется *гладким класса C^k* , если в окрестности любой точки $x \in X$ функции, выражающие локальные координаты образа $f(x)$ через координаты прообраза точки x , являются гладкими функциями класса C^k . Очевидно, что класс гладкости k отображения f имеет смысл, если число k не превосходит классов гладкости многообразий X и Y . Аналогично определяются аналитическое и комплексное аналитическое отображения.

Пусть X — гладкое n -мерное многообразие, $(U_\alpha, \{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\})$ — атлас, $x_0 \in X$ — фиксированная точка. *Касательным вектором ξ к многообразию X в точке x_0* называется набор чисел $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\xi_\alpha^k = \sum_{j=1}^n \xi_\beta^j \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j}(x_0). \quad (3)$$

Числа $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ называются *координатами или компонентами вектора ξ , отнесенными к карте $(U_\alpha, \{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\})$* . Формула (3) указывает закон преобразования координат вектора ξ при переходе от одной карты к другой. Такой закон в дифференциальной геометрии называют *тензорным законом преобразования компонент тензора валентности $(1, 0)$* . Таким образом, в терминах дифференциальной геометрии касательный вектор — это тензор валентности $(1, 0)$.

Пусть через точку x_0 многообразия X проходит гладкая кривая, которая параметрически задается гладким отображением $\gamma: (-1, 1) \rightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$. В локальной системе координат $\{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\}$ эта кривая задается набором функций

$$x_\alpha^k(t) = x_\alpha^k(\gamma(t)). \quad (4)$$

Положим

$$\xi_\alpha^k = \frac{d}{dt} (x_\alpha^k(t)) \Big|_{t=0} \quad (5)$$

Очевидно, что числа $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ удовлетворяют тензорному закону преобразования (3), т.е. они задают некоторый касательный вектор ξ в точке x_0 к многообразию X . Этот вектор называется *касательным вектором к кривой γ* и обозначается через $\frac{d\gamma}{dt}(0)$, т.е. $\xi = \frac{d\gamma}{dt}(0)$.

Множество всех касательных векторов к многообразию X мы будем обозначать через TX . Множество TX снабжается естественной топологией. В ней для касательного вектора ξ_0 в точке x_0 окрестностью V объявляется множество всех таких касательных векторов η в точках x , для которых

$$\rho(x, x_0) < \epsilon \text{ и } \sum_{k=1}^n (\xi_{0\alpha}^k - \eta_\alpha^k)^2 < \epsilon \text{ для некоторого числа } \epsilon > 0 \text{ и некото-}$$

рой карты $U_\alpha \ni x_0$. Проверку того, что система окрестностей V образует базу открытых множеств, предоставляем читателю.

Пусть $\pi: TX \rightarrow X$ — отображение, сопоставляющее каждому касательному вектору ξ точку x , в которой вектор ξ касается многообразия X . Очевидно, что отображение π непрерывно. Это отображение задает векторное расслоение с базой X , тотальным пространством TX и слоем, изоморфным линейному пространству \mathbb{R}^n . В самом деле, если U_α — карта многообразия X , то через

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

обозначим отображение, которое набору $(x_0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ сопоставляет касательный вектор ξ , компоненты которого задаются формулами

$$\xi_\beta^k = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(x_0). \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что для так определяемых компонент выполнен тензорный закон преобразования (3), причем $\xi_\alpha^k = \xi^k$, т.е. числа (6) действительно задают касательный вектор в точке x_0 . При этом обратное отображение φ_α^{-1} задается формулой

$$\varphi_\alpha^{-1}(\xi) = (\pi(\xi), \xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n),$$

где ξ_α^k — компоненты касательного вектора ξ . Поэтому функция перехода $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha$ задается формулой

$$\varphi_{\beta\alpha}(x_0, \xi^1, \dots, \xi^n) = \left(x_0, \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^j}(x_0), \dots, \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^j}(x_0) \right), \quad (7)$$

которая показывает, что функции перехода $\varphi_{\beta\alpha}$ являются послойными линейными отображениями. Значит, действительно, отображение π является векторным расслоением.

Векторное расслоение $\pi: TX \rightarrow X$ называется *касательным расслоением многообразия X* . Слой над точкой $x \in X$ обычно обозначается через $T_x X$ и называется *касательным пространством в точке x к многообразию X* .

Приведенная терминология оправдывается следующим обстоятельством. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ — вложение многообразия X в евклидово пространство \mathbb{R}^N . В локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ в окрестности точки $x_0 \in X$ это вложение задается вектор-функцией от переменных $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$:

$$f(x) = f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n).$$

Разложим эту вектор-функцию по формуле Тейлора в точке $x_0 = (x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n)$, положив $\Delta x_\alpha^k = x_\alpha^k - x_{0\alpha}^k$:

$$f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) = f(x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^j}(x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n) \Delta x_\alpha^j + o(\Delta x_\alpha^k). \quad (8)$$

Отбросив остаточный член $o(\Delta x_\alpha^k)$, получим близкую к f функцию g :

$$g(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) = f(x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^k}(x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n) \Delta x_\alpha^k. \quad (9)$$

Если векторы $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^k}(x_{0\alpha}^1, \dots, x_{0\alpha}^n) \right\}, 1 \leq k \leq n$, линейно независимы, то

функция g задает n -мерное подпространство в \mathbb{R}^N , которое естественно назвать *касательным пространством к подмногообразию X* . Всякий вектор ξ , лежащий в касательном пространстве к подмногообразию X , единственным образом разлагается в линейную комбинацию базисных векторов

$$\xi = \sum_{k=1}^n \xi_\alpha^k \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^k}. \quad (10)$$

При этом его координаты $\{\xi_\alpha^k\}$ меняются при переходе к другой системе координат по закону (3), т.е. по тензорному закону.

Таким образом, наше определение касательного вектора как набора компонент $\{\xi_\alpha^k\}$ задает по формуле (10) вектор ξ , касательный к подмногообразию X .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий. Построим линейное отображение касательных расслоений

$$Df: TX \rightarrow TY$$

следующим образом. Пусть $\xi \in TX$ — касательный вектор в точке x_0 , γ — гладкая кривая, проходящая через точку x_0 , $\gamma(0) = x_0$, и касающаяся вектора ξ , т.е. такая, что $\xi = \frac{d\gamma}{dt}(0)$. Тогда кривая $f(\gamma(t))$ в многообразии Y проходит через точку $y_0 = f(x_0)$. Положим

$$Df(\xi) = \frac{d(f(\gamma))}{dt}(0). \quad (11)$$

Формула (11) задает отображение касательных расслоений. Осталось доказать, что это отображение линейно. Для этого достаточно описать отображение Df в координатах пространств $T_{x_0}X$ и $T_{y_0}Y$. Пусть $\{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n\}$ и $\{y_\beta^1, \dots, y_\beta^m\}$ — локальные системы координат в окрестности соответственно точек x_0 и y_0 . Тогда отображение f задается как набор функций

$$y_\beta^j = y_\beta^j(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n).$$

Если $x_\alpha^k = x_\alpha^k(t)$ — кривая $\gamma(t)$, $\xi_\alpha^k = \frac{dx_\alpha^k}{dt}(0)$, то кривая $f(\gamma(t))$ определяется функциями

$$y_\beta^j = y_\beta^j(x_\alpha^1(t), \dots, x_\alpha^n(t)).$$

Тогда вектор $Df(\xi)$ задается компонентами

$$\eta^j = \frac{dy_\beta^j}{dt}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_\beta^j}{\partial x_\alpha^k}(x_0) \frac{dx_\alpha^k}{dt}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_\beta^j}{\partial x_\alpha^k}(x_0) \xi_\alpha^k. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что, во-первых, наше определение отображения Df корректно, поскольку не зависит от выбора кривой γ , а зависит только от самого касательного вектора. Во-вторых, отображение Df линейно.

Отображение Df называется *дифференциалом отображения* f .

Пример 1. Покажем, что определение дифференциала Df отображения f является обобщением обычного дифференциала функции. Гладкую функцию одной вещественной переменной можно понимать как отображение пространства \mathbb{R}^1 в себя: $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Касательное расслоение пространства \mathbb{R}^1 изоморфно декартову произведению $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$. Поэтому дифференциал $Df: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ в координатах (x, ξ) задается формулой

$$Df(x, \xi) = (x, f'(x)\xi).$$

Обычный же дифференциал имеет вид $df = f'(x)dx$. Таким образом, $Df(x, dx) = (x, df)$.

У п р а ж н е н и е. Показать, что для дифференциала выполняются свойства:

а) $D(f \circ g) = (Df) \circ (Dg)$;

б) $D(\text{id}) = \text{id}$;

в) если f — диффеоморфизм, то Df — изоморфизм расслоений;

г) если f — погружение, то Df — мономорфизм.

Рассмотрим гладкое многообразие Y и подмногообразие $X \subset Y$. Вложение $i: X \subset Y$ является гладким отображением многообразий, у которого дифференциал $Di: TX \rightarrow TY$ является послойным мономорфизмом. Тогда над многообразием X получается два векторных расслоения: $i^*(TY)$ — ограничение касательного расслоения к многообразию Y на подмногообразие X — и его подрасслоение TX . Согласно теореме 1 из § 4 расслоение $i^*(TY)$ разлагается в прямую сумму двух слагаемых:

$$i^*(TY) = TX \oplus \eta.$$

Дополнительное слагаемое η называется *нормальным расслоением к подмногообразию X в многообразии Y* ^{*)}. Каждый слой расслоения η над точкой $x_0 \in X$ состоит из тех касательных векторов к многообразию Y , кото-

рые ортогональны к касательному пространству $T_{x_0}(X)$. Нормальное расслоение будем обозначать через $\nu(X \subset Y)$ или просто через $\nu(X)$. Совершенно ясно, что понятие нормального расслоения может быть введено не только для подмногообразий, но и для любого погружения $i: X \rightarrow Y$ многообразия X в многообразие Y .

Как известно, всякое компактное многообразие X может быть вложено в евклидово пространство \mathbb{R}^N некоторой размерности N . Пусть $i: X \rightarrow \mathbb{R}^N$ — вложение. Тогда

$$i^*(T\mathbb{R}^N) = TX \oplus \nu(X \subset \mathbb{R}^N).$$

Поскольку расслоение $T\mathbb{R}^N$ тривиально, то $TX \oplus \nu(X) = \bar{N}$. В этом частном случае расслоение $\nu(X)$ называют просто *нормальным расслоением многообразия X* (безотносительно к вложению). Таким образом, нормальное расслоение $\nu(X)$ многообразия X определено неоднозначно; оно зависит от способа вложения в евклидово пространство \mathbb{R}^N и размерности N . Однако равенство $TX \oplus \nu(X) = \bar{N}$ показывает, что эта неоднозначность

^{*)} Расслоение η по построению зависит от выбора метрики в TY . Но для различных метрик получаются изоморфные дополнительные слагаемые.

невелика. В самом деле, пусть $\nu_1(X)$ — другое расслоение, удовлетворяющее аналогичному условию $TX \oplus \nu_1(X) = \bar{N}_1$. Тогда, очевидно,

$$\nu(X) \oplus \bar{N}_1 = \nu_1(X) \oplus \bar{N},$$

т.е. расслоения $\nu(X)$ и $\nu_1(X)$ становятся изоморфными после прибавления к ним некоторых тривиальных слагаемых.

Пример 2. Изучим касательное расслоение к одномерному многообразию S^1 — окружности. На окружности S^1 введем две карты $U_1 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ и $U_2 = \{0 < \varphi < 2\pi\}$, где φ — угловой параметр в полярной системе координат на плоскости. На карте U_1 в качестве координаты возьмем функцию $x_1 = \varphi$, $-\pi < x_1 < \pi$, на карте U_2 — функцию $x_2 = \varphi$, $0 < x_2 < 2\pi$. Пересечение карт $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент связности $V_1 = \{0 < \varphi < \pi\}$ и $V_2 = \{\pi < \varphi < 2\pi\}$. Функция перехода имеет вид

$$x_1 = x_1(x_2) = \begin{cases} x_2, & 0 < x_2 < \pi, \\ x_2 - 2\pi, & \pi < x_2 < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда согласно формуле (7) функция перехода φ_{12} для касательного расслоения имеет вид

$$\varphi_{12}(\varphi, \xi) = \xi \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \xi,$$

т.е. является тождественным гомеоморфизмом на слоях. Значит, касательное расслоение TS^1 изоморфно декартову произведению $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}^1$, т.е. является тривиальным одномерным расслоением.

Пример 3. Рассмотрим двумерную сферу S^2 . Ее удобно представлять в виде пополненной комплексной плоскости $S^2 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$. Зададим две карты на сфере S^2 : $U_1 = \mathbb{C}^1$, $U_2 = (\mathbb{C}^1 \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. В первой карте в качестве комплексной координаты z_1 возьмем функцию $z_1 = z$. Во второй карте возьмем комплексную координату $z_2 = 1/z$, которая однозначно продолжается нулем в бесконечно удаленной точке ∞ . Таким образом, функция перехода на пересечении карт $U_1 \cap U_2$ имеет вид

$$z_1 \equiv 1/z_2.$$

Значит, функция перехода для касательного расслоения имеет вид

$$\varphi_{12}(z, \xi) = \xi \frac{\partial z_1}{\partial z_2} = -\xi \frac{1}{z^2} = -\xi z^2.$$

В вещественной форме функция φ_{12} имеет матричный вид ($z = x + iy$):

$$\varphi_{12}(x, y) = \begin{vmatrix} -\operatorname{Re} z^2 & -\operatorname{Im} z^2 \\ \operatorname{Im} z^2 & -\operatorname{Re} z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{vmatrix}.$$

Если $z = \rho e^{i\alpha}$, то

$$\varphi_{12}(\rho, \alpha) = \rho^2 \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}.$$

Покажем, что касательное расслоение TS^2 не изоморфно тривиальному расслоению. Если бы расслоение TS^2 являлось тривиальным, то существо-

вали бы такие матричнозначные функции

$$h_1: U_1 \rightarrow GL(2, \mathbb{R}); \quad h_2: U_2 \rightarrow GL(2, \mathbb{R}),$$

что

$$\varphi_{12}(\rho, \alpha) = h_1(\rho, \alpha)h_2^{-1}(\rho, \alpha).$$

Поскольку карты U_1, U_2 являются стягиваемыми пространствами, то функции h_1 и h_2 гомотопны постоянным отображениям. Тогда и функция $\varphi_{12}(\rho, \alpha)$ гомотопна постоянной функции. С другой стороны, при $\rho = \text{const}$ функция φ_{12} задает отображение окружности S^1 с параметром α в группу $SO(2) = S^1$, причем отображение имеет степень 2, т.е. это отображение не гомотопно постоянному отображению в классе отображений $S^1 \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$.

Рассмотрим произвольное векторное расслоение $p: E \rightarrow X$, база которого является гладким многообразием. Допустим, что функции перехода $\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ являются гладкими отображениями. Тогда, очевидно, тотальное пространство E является гладким многообразием, причем $\dim E = \dim X + n$. В самом деле, если $\{U_\alpha\}$ — атлас многообразия X , то в качестве атласа многообразия E следует взять

$$V_\alpha = p^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

В качестве локальных координат следует взять координаты на карте U_α и декартовы координаты слоя. Гладкость функций $\varphi_{\alpha\beta}$ обеспечивает гладкость функций замены координат. Возникает естественный вопрос: для любого ли векторного расслоения над гладким многообразием X существует атлас с гладкими функциями склейки $\varphi_{\alpha\beta}$?

Т е о р е м а 1. Пусть $p: E \rightarrow X$ — n -мерное векторное расслоение, X — компактное гладкое многообразие. Тогда существуют такой атлас $\{U_\alpha\}$ и такие координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, что функции склейки $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ являются гладкими функциями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выбран достаточно мелкий атлас расслоения p и заданы координатные гомеоморфизмы $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$. Функции перехода $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, вообще говоря, всего лишь непрерывны. Задача заключается в том, чтобы заменить гомеоморфизмы ψ_α на новые координатные гомеоморфизмы φ_α такие, что $\varphi_{\beta\alpha}$ уже будут гладкими функциями. Или, что то же самое, требуется найти функции $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, чтобы композиции $h_\beta^{-1}(x)\psi_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x)$ были гладкими функциями. Пусть $\{U'_\alpha\}$ — новый конечный атлас, вписанный в $\{U_\alpha\}$, причем $U'_\alpha \subset \bar{U}'_\alpha \subset U_\alpha$. Функции $h_\alpha(x)$ будем строить по индукции, считая, что индекс α пробегает целые числа от 1 до N .

Переходя, если это необходимо, к атласу $\{U'_\alpha\}$, можно считать, что все матрицы вида $\psi_{\alpha\beta}(x)$ ограничены в совокупности по норме некоторой константой C : $\|\psi_{\alpha\beta}(x)\| \leq C$. Пусть $0 < \epsilon < \frac{1}{C}$, $\epsilon < 1$. Построим гладкие функции

$\varphi_{\alpha\beta}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, удовлетворяющие неравенствам $\|\psi_{\alpha\beta}(x) - \varphi_{\alpha\beta}(x)\| < \epsilon$ и являющиеся коциклами, т.е. $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\gamma\alpha} \equiv 1$, $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} \equiv 1$. При этом мы будем опираться на следующую лемму.

Л е м м а. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в области U евклидова пространства, K — некоторый компакт в U . Тогда существует такая окрестность $V \supset K$, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такая гладкая функция $g(x)$, определенная на V , что $|g(x) - f(x)| < \epsilon$, $x \in V$.

Более того, если функция $f(x)$ уже является гладкой в окрестности компакта K' , то можно выбрать гладкую функцию g таким образом, чтобы

выполнялось дополнительное равенство $g(x) \equiv f(x)$ в некоторой окрестности компакта K' .

Применим лемму для построения функций $\varphi_{\alpha\beta}$. Согласно лемме существует такая функция φ_{12} , определенная в окрестности $\bar{U}_1' \cap \bar{U}_2'$, удовлетворяющая неравенству

$$\|\varphi_{12}(x) - \psi_{12}(x)\| < \epsilon.$$

Пусть уже построены функции $\varphi_{\alpha\beta}(x)$, определенные в окрестности $\bar{U}_\alpha' \cap \bar{U}_\beta'$ для всех $\alpha < \beta \leq \beta_0$, удовлетворяющие неравенствам $\|\varphi_{\alpha\beta}(x) - \psi_{\alpha\beta}(x)\| < \epsilon$, причем выполнены условия коцикличности

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) \varphi_{\beta\gamma}(x) \varphi_{\gamma\alpha}(x) \equiv 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \leq \beta_0.$$

Функцию $\varphi_{1, \beta_0+1}(x)$ строим, используя лемму. Если функции $\varphi_{\alpha, \beta_0+1}(x)$ уже построены для всех $\alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0$ и они удовлетворяют условиям коцикличности

$$\varphi_{\alpha, \beta_0+1}(x) = \varphi_{\alpha, \alpha'}(x) \varphi_{\alpha', \beta_0+1}(x), \quad \alpha, \alpha' \leq \alpha_0,$$

то функция $\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)$ определяется в окрестности $\bar{U}_\gamma' \cap \bar{U}_{\alpha_0+1}' \cap \bar{U}_{\beta_0+1}'$, $\gamma \leq \alpha_0$, формулой

$$\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x) = \varphi_{\gamma, \alpha_0+1}^{-1}(x) \varphi_{\gamma, \beta_0+1}(x).$$

Тем самым функция $\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)$ определена в окрестности объединения $V = \bigcup_{\gamma \leq \alpha_0} (\bar{U}_\gamma' \cap \bar{U}_{\alpha_0+1}' \cap \bar{U}_{\beta_0+1}')$ и удовлетворяет там условию

$$\|\psi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x) - \varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)\| \leq 2C\epsilon.$$

Продолжим функцию $\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)$ с замыкания некоторой окрестности множества V на окрестность $\bar{U}_{\alpha_0+1}' \cap \bar{U}_{\beta_0+1}'$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\|\psi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x) - \varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)\| \leq 2C\epsilon.$$

Далее, по лемме аппроксимируем функцию $\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)$ гладкой и совпадающей с ней в окрестности V . Получим в итоге гладкую функцию $\varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)$, определенную в окрестности $\bar{U}_{\alpha_0+1}' \cap \bar{U}_{\beta_0+1}'$ и такую, что $\|\psi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x) - \varphi_{\alpha_0+1, \beta_0+1}(x)\| \leq (2C+1)\epsilon$. Тем самым мы за конечное число шагов ($\leq N^2$) построим по индукции гладкие функции $\varphi_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\psi_{\alpha\beta}(x) - \varphi_{\alpha\beta}(x)\| \leq (2C+1)^{N^2} \epsilon = \epsilon'.$$

Теперь будем строить функции $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n, R)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x) \psi_{\alpha\beta}(x) h_\beta^{-1}(x),$$

или

$$h_\alpha(x) = \varphi_{\alpha\beta}(x) h_\beta(x) \psi_{\beta\alpha}(x). \quad (13)$$

Соотношение (13) достаточно проверять только для $\alpha > \beta$. Поэтому функции h_α строим по индукции. Положим $h_1(x) \equiv 1$. Если функции $h_1(x), \dots, h_{\alpha_0}(x)$, удовлетворяющие условиям (13), уже построены, причем $\|1 - h_\alpha(x)\| < \epsilon$, $\alpha \leq \alpha_0$, то функция $h_{\alpha_0+1}(x)$ определена формулой (13)

в окрестности множества

$$V = \bigcup_{\alpha \leq \alpha_0} \bar{U}'_{\alpha_0+1} \cap \bar{U}'_{\alpha}.$$

На множестве V выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|1 - h_{\alpha_0+1}(x)\| &= \|1 - \varphi_{\alpha_0+1,\beta}(x) h_{\beta}(x) \psi_{\beta,\alpha_0+1}(x)\| \leq \\ &\leq C^2 \|h_{\beta} - \varphi_{\beta,\alpha_0+1} \psi_{\beta,\alpha_0+1}^{-1}\| \leq 2C^3 \epsilon. \end{aligned}$$

Если число ϵ достаточно мало, то функция $h_{\alpha_0+1}(x)$ может быть продолжена с окрестности множества V на карту U_{α_0+1} с выполнением того же неравенства. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Теперь мы опишем геометрическое строение касательного и нормального расслоения к гладкому многообразию.

Теорема 2. Пусть $i: X \subset Y$ — гладкое компактное подмногообразие X многообразия Y . Существует окрестность $V \supset X$ подмногообразия X , диффеоморфная тотальному пространству нормального расслоения $\nu(X \subset Y)$.

Доказательство. Фиксируем на многообразии Y какую-нибудь риманову метрику, существование которой обеспечивается теоремой 1 и замечанием 2 из § 3.

Построим отображение $f: \nu(X) \rightarrow Y$ следующим образом. Пусть $\xi \in \nu(X)$ — вектор, касательный в точке $x \in X \subset Y$ к многообразию Y и ортогональный к подпространству $T_x(X)$. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая линия, $\gamma(0) = x$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \xi$. Положим $f(\xi) = \gamma(1)$. Проверим, что в точках нулевого сечения

расслоения $\nu(X)$ отображение f имеет невырожденную матрицу Якоби. Заметим, что а) отображение f на нулевом сечении тождественным образом отображает многообразие X на себя и б) $f(\lambda \xi) = \gamma(\lambda)$. Поэтому матрица Якоби является единичной матрицей, отображающей пространство $T_x(\nu(X)) = T_x(X) \oplus \nu_x(X)$ в пространство $T_x(Y) = T_x(X) \oplus \nu_x(X)$. По теореме о неявных функциях существует окрестность V нулевого сечения расслоения $\nu(X)$, которая диффеоморфно отображается отображением f на некоторую окрестность $f(V)$ подмногообразия X . Так как окрестность V диффеоморфна тотальному пространству расслоения $\nu(X)$, то теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких компактных многообразий, дифференциал которого Df является эпиморфизмом в каждой точке $x \in X$. Тогда отображение f есть локально тривиальное расслоение, слой которого является гладким многообразием.

Доказательство. Из условий теоремы немедленно следует, что касательное расслоение TX разлагается в прямую сумму $TX = \xi \oplus f^*TY$, причем дифференциал Df является композицией естественной проекции TX на второе слагаемое f^*TY и отображения $f^*TY \rightarrow TY$.

Без ограничения общности можно рассмотреть в Y карту U , диффеоморфную \mathbb{R}^n , а вместо многообразия X — его часть $f^{-1}(U)$. Тогда отображение f является векторнозначной функцией $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть сначала $n = 1$. Тогда из условий теоремы следует, что градиент функции f отличен от нуля в каждой точке. Рассмотрим векторное поле $\text{grad } f$ (в некоторой римановой метрике на многообразии X). Интегральные траектории $\gamma(x_0, t)$ этого векторного поля ортогональны к каждой гиперповерхности уровня функции f . Выберем такую риманову метрику, чтобы норма градиента $\text{grad } f$ была тождественно равна единице. Поскольку $\text{grad } f \neq 0$, то в ка-

честве такой новой метрики можно взять

$$\langle \xi, \eta \rangle_1 = \langle \xi, \eta \rangle \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle.$$

Действительно,

$$\langle \text{grad } f, \xi \rangle = \xi(f) = \langle \text{grad}_1 f, \xi \rangle_1 = \langle \text{grad}_1 f, \xi \rangle \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle,$$

откуда

$$\text{grad}_1 f = \text{grad } f / \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle.$$

Тогда

$$\langle \text{grad}_1 f, \text{grad}_1 f \rangle_1 = \langle \text{grad}_1 f, \text{grad}_1 f \rangle \cdot \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle =$$

$$= \frac{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle}{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle^2} \cdot \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle = 1.$$

Таким образом, если $\gamma(t)$ — интегральная траектория, то $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) =$

$\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \equiv 1$. Значит, на каждой траектории $\gamma(t)$ функция f линейна по параметру t с коэффициентом 1. Это значит, что если $f(x_0) = f(x_1)$, то и $f(\gamma(x_0, t)) = f(\gamma(x_1, t)) = f(x_0) + t$. Положим $Z = f^{-1}(0)$, $g: Z \times \mathbb{R}^1 \rightarrow X$, $g(x, t) = \gamma(x, t)$. Отображение g является послойным гладким гомеоморфизмом. Следовательно, отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ является локально тривиальным расслоением.

Далее, доказательство проведем индукцией по числу n . Рассмотрим вектор-функцию $f(x) = \{f^1(x), \dots, f^n(x)\}$, удовлетворяющую условиям теоремы. Выберем риманову метрику на многообразии X таким образом, чтобы градиенты $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_n$ были ортонормированы. Такая метрика существует. В самом деле, пусть сначала задана произвольная риманова метрика. Тогда, поскольку дифференциалы df_1, df_2, \dots, df_n линейно независимы в каждой точке многообразия X , то и градиенты $\{\text{grad } f_k\}$ линейно независимы в каждой точке. Следовательно, матрица функций

$$a_{ij}(x) = \langle \text{grad } f_i(x), \text{grad } f_j(x) \rangle$$

невырождена в каждой точке. Пусть $\|b_{ij}(x)\|$ — матрица, обратная к матрице $\|a_{ij}(x)\|$, т.е. такая, что $\sum_{\alpha} b_{i\alpha}(x) a_{j\alpha}(x) \equiv \delta_{ij}$. Положим

$$\xi_k = \sum_i b_{ki}(x) \text{grad } f_i(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi_k(f_j) &= \sum_i b_{ki}(x) \text{grad } f_i(f_j) = \sum_i b_{ki}(x) \langle \text{grad } f_i, \text{grad } f_j \rangle = \\ &= \sum_i b_{ki}(x) a_{ij}(x) \equiv \delta_{kj}. \end{aligned}$$

Пусть U_α — достаточно малая окрестность точки в многообразии X . Система векторных полей ξ_1, \dots, ξ_n дополняется до базиса такими векторными полями $\eta_{n+1}, \dots, \eta_N$, что $\eta_k(f_i) \equiv 0$. Введем новую метрику в карте U_α , полагая $\langle \xi_i, \xi_j \rangle_\alpha \equiv \delta_{ij}$, $\langle \xi_k, \eta_s \rangle_\alpha \equiv 0$. Если φ_α — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, то положим

$$\langle \xi, \eta \rangle_0 = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) \langle \xi, \eta \rangle_{\alpha}.$$

Тогда метрика $\langle \xi, \eta \rangle_0$ удовлетворяет условиям

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle_0 \equiv \delta_{ij}, \quad \langle \xi_k, \eta \rangle_0 \equiv 0$$

для любого вектора η такого, что $\eta(f_i) = 0$. Пусть $\text{grad } f_i$ — градиенты функций f_i в метрике $\langle \xi, \eta \rangle_0$. Тогда выполняются соотношения

$$\langle \text{grad } f_i, \xi \rangle_0 = \xi(f_i)$$

для любого вектора ξ . В частности,

$$\langle \text{grad } f_i, \xi_k \rangle_0 = \delta_{ki}, \quad \langle \text{grad } f_i, \eta \rangle_0 \equiv 0,$$

если $\eta(f_i) = 0$. Такие же соотношения выполнены и для векторного поля ξ_i . Значит, $\xi_i = \text{grad } f_i$, т.е. $\langle \text{grad } f_i, \text{grad } f_j \rangle = \delta_{ij}$, что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию $g(x) = \{f^1(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\}$. Эта вектор-функция тоже удовлетворяет условиям теоремы и предположениям индукции. Значит, многообразие X диффеоморфно декартову произведению $X = Z \times \mathbb{R}^{n-1}$, а функции f_1, \dots, f_{n-1} переходят при этом диффеоморфизме в координатные функции t_1, \dots, t_{n-1} второго сомножителя. Тогда градиент $\text{grad } f_n$ касается первого множителя Z в каждой точке. Функция $f_n = f_n(z, t_1, \dots, t_{n-1})$ не зависит от переменных t_1, \dots, t_{n-1} , поскольку $\frac{\partial f_n}{\partial t_k} \equiv 0$. Тогда, применяя

предположение индукции к многообразию Z и функции f_n , получаем, что многообразие Z диффеоморфно декартову произведению $Z_1 \times \mathbb{R}^1$, а функция $f_n(z_1, t_n) \equiv t_n$. Это значит, что многообразие X послойно диффеоморфно декартову произведению $Z_1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} = Z_1 \times \mathbb{R}^n$. Теорема 3 полностью доказана.

В нижеприведенных примерах демонстрируется, как язык векторных расслоений используется в различных задачах теории многообразий.

Пример 4. Инвариантная формулировка теоремы о неявных функциях. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий. Точка $y_0 \in Y$ называется *регулярным значением отображения* f , если для любой точки x из прообраза $f^{-1}(y_0)$ дифференциал $Df: T_x(X) \rightarrow T_{y_0}(Y)$ является эпиморфизмом. Тогда теорема о неявных функциях гласит, что прообраз $Z = f^{-1}(y_0)$ является гладким подмногообразием, причем $TX|_Z = TZ \oplus \mathbb{R}^m$, $m = \dim Y$. Более общо, если $W \subset Y$ — подмногообразие, то отображение f называется *трансверсальным вдоль подмногообразия* W , когда для любой точки $x \in f^{-1}(W)$ имеет место равенство

$$T_{f(x)} Y = T_{f(x)} W + Df(T_x X).$$

В частности, отображение f трансверсально вдоль любой регулярной точки $y_0 \in Y$. Теорема о неявной функции тогда утверждает, что прообраз $Z = f^{-1}(W)$ является подмногообразием в многообразии X , причем нормальное расслоение $\nu(Z \subset X)$ изоморфно $f^*(\nu(W \subset Y))$, а дифференциал Df осуществляет послойный изоморфизм

$$\nu(Z \subset X) \rightarrow \nu(W \subset Y).$$

Пример 5. Функции Морса на многообразиях. Пусть задана функция f на гладком многообразии X . Точка x_0 называется *критической*, если $df(x_0) = 0$. Критическая точка x_0 называется *невырожденной*, если матрица вторых частных производных функции f в точке x_0 невырождена. Невырожденность матрицы вторых частных производных в критической точке x_0 не зависит от выбора локальной системы координат. Рас-

смотрим тотальное пространство T^*X кокасательного расслоения к многообразию X (т.е. расслоения, сопряженного к касательному расслоению). Тогда по функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ строим отображение $df: X \rightarrow T^*X$, сопряженное к Df , которое каждой точке $x \in X$ сопоставляет линейную форму на $T_x X$, равную дифференциалу функции в точке x . Таким образом, в многообразии T^*X возникает два подмногообразия: нулевое сечение X_0 расслоения T^*X и образ $df(X)$. Точки пересечения этих подмногообразий соответствуют критическим точкам функции f . Критическая точка невырождена тогда и только тогда, когда пересечение X_0 и $df(X)$ трансверсально. Если все критические точки функции f невырождены, то f^* называется *функцией Морса*. Таким образом, функция f является функцией Морса тогда и только тогда, когда отображение $df: X \rightarrow T^*X$ трансверсально вдоль нулевого сечения $X_0 \subset T^*X$.

Пример 6. Ориентируемые многообразия. Многообразие X называется *ориентируемым*, если существует такой атлас $\{U_\alpha\}$, что все функции $\varphi_{\alpha\beta}$ замены координат имеют положительный якобиан в каждой точке. Выбор такого атласа называется *ориентацией* многообразия X . Если многообразие X ориентируемо, то структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ его касательного расслоения TX редуцируется к своей подгруппе $GL^+(n, \mathbb{R})$ матриц с положительным детерминантом.

Обратно, если структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ касательного расслоения TX редуцируется к своей подгруппе $GL^+(n, \mathbb{R})$, то многообразие X ориентируемо.

В самом деле, пусть $\{U_\alpha\}$ — атлас, $\varphi_{\alpha\beta} = \left\| \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} \right\|$ — функции

склейки касательного расслоения, $\psi_{\alpha\beta} = h_\alpha \varphi_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$ — новые функции склейки, $\det \psi_{\alpha\beta} > 0$. Если бы матричнозначные функции $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$

имели вид матриц Якоби, т.е. $h_\alpha(x) = \left\| \frac{\partial y_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j} \right\|$, то тогда функции

$y_\alpha^k = y_\alpha^k(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ служили бы искомой заменой координат в каждой карте, приводящей к ориентации многообразия X . Однако в общем случае это не так. Необходимо функции h_α поправить. Заметим, что если какие-то функции h_α уже найдены, то, поскольку нас интересует только знак детерминанта $\psi_{\alpha\beta}$, мы можем менять функции h_α произвольным образом, следя только за тем, чтобы не менялся знак $\det h_\alpha(x)$ в каждой точке. Значит, вместо функций $h_\alpha(x)$ можно взять новые функции

$$\bar{h}_\alpha(x) = \left\| \begin{array}{cccc} \pm 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array} \right\|$$

имеющие вид диагональной матрицы, у которой на первом месте по диагонали стоит ± 1 , а на остальных местах диагонали — единицы. Знак первого элемента на каждой компоненте связности карты U_α выбираем такой же, как и знак $\det h_\alpha(x)$. Тогда новые функции перехода

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x) = \bar{h}_\alpha(x) \varphi_{\alpha\beta}(x) \bar{h}_\beta^{-1}(x)$$

удовлетворяют тому же условию

$$\det \bar{\psi}_{\alpha\beta}(x) > 0.$$

С другой стороны, функции $\bar{h}_\alpha(x)$ являются матрицами Якоби некоторой замены координат:

$$\begin{aligned} y_\alpha^1 &= \pm x_\alpha^1, \\ y_\alpha^2 &= x_\alpha^2, \\ &\dots\dots\dots \\ y_\alpha^n &= x_\alpha^n, \end{aligned}$$

Таким образом, найден новый атлас, задающий ориентацию многообразия X .

§6. Линейные группы и связанные с ними расслоения

Этот параграф состоит из примеров различных векторных расслоений, естественно возникающих из рассмотрения линейных групп и их однородных пространств.

1. Расслоения Хопфа. Вещественным проективным пространством RP^n называется множество одномерных прямых в R^{n+1} , проходящих через начало координат. В этом множестве вводится естественная топология, определяемая метрикой, в которой расстояние между двумя прямыми измеряется меньшим углом между ними. Проективное пространство RP^n является гладким (и даже вещественным аналитическим) n -мерным многообразием. Чтобы ввести на RP^n структуру гладкого многообразия, следует заметить, что каждая прямая в пространстве R^{n+1} однозначно определяется ненулевым вектором x , в ней лежащим. Пусть (x_0, \dots, x_n) — декартовы координаты вектора x , не все равные нулю. Тогда прямая l определяется набором чисел (x_0, \dots, x_n) , причем всякий набор чисел вида $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda \neq 0$, определяет ту же прямую l . Таким образом, точка проективного пространства задается как класс $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ наборов чисел (x_0, \dots, x_n) , не всех равных нулю с точностью до умножения их на ненулевое число λ . Числа (x_0, x_1, \dots, x_n) называют *проективными координатами точки* из RP^n . Зададим атлас $\{U_k\}_{k=0}^n$ на RP^n . Положим

$$U_k = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] : x_k \neq 0\}.$$

Систему координат на U_k определим как систему функций

$$y_k^\alpha = \frac{x_\alpha}{x_k}, \quad 0 \leq \alpha \leq n, \quad \alpha \neq k.$$

Нумерация координат индексом α не сплошная, а с пропуском значения $\alpha = k$. Замена переменных на пересечении карт $U_k \cap U_j$ имеет вид ($k \neq j$)

$$y_k^\alpha = \begin{cases} \frac{y_j^\alpha}{y_j^k} & \text{при } \alpha \neq j, \\ \frac{1}{y_j^k} & \text{при } \alpha = j. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку на пересечении $U_k \cap U_j$ имеем $x_k \neq 0, x_j \neq 0$, то $y_j^k = x_k/x_j \neq 0$, значит, формулы (1) корректно определены и задают вещественно аналитические функции замены координат. Таким образом, RP^n является гладким многообразием размерности n .

Рассмотрим теперь пространство E , точками которого являются пары (l, x) , где l — прямая в R^{n+1} , проходящая через начало координат, а x —

вектор, принадлежащий этой прямой. Пространство E отличается от евклидова пространства \mathbb{R}^{n+1} только тем, что вместо нулевого вектора из \mathbb{R}^{n+1} в пространстве E представлено много точек вида $(l, 0)$. Отображение $p: E \rightarrow \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой паре (l, x) его первую координату, является локально тривиальным векторным расслоением. В самом деле, пространство E можно представлять как подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, задаваемое в каждой локальной системе координат системой уравнений:

$$\text{ранг матрицы} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{vmatrix} = 1,$$

где (x_0, x_1, \dots, x_n) — проективные координаты точки из $\mathbb{R}P^n$, а (y_0, y_1, \dots, y_n) — координаты точки из \mathbb{R}^{n+1} . Если, скажем, рассматривается карта $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, то можно положить $x_0 = 1$, и мы получаем систему уравнений:

$$\text{ранг} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{vmatrix} = 1,$$

т.е.

$$\begin{cases} \det \begin{vmatrix} 1 & x_k \\ y_0 & y_k \end{vmatrix} = 0, \\ \det \begin{vmatrix} x_k & x_j \\ y_k & y_j \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Вторая группа уравнений зависит от первой. Поэтому множество E выделяется в $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ следующей системой n уравнений:

$$f_k(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) = y_k - x_k y_0 = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Матрица частных производных функций f_k имеет вид

$$\begin{vmatrix} -y_0 & 0 & \dots & 0 & -x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_0 & \dots & 0 & -x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -y_0 & -x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Поэтому ранг этой матрицы максимален. По теореме о неявных функциях множество E является подмногообразием размерности $n+1$. В качестве координат на множестве E можно взять координаты (y_0, x_1, \dots, x_n) . Проекция $p: E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ заключается в отображении $(y_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$. Значит, прообраз $p^{-1}(U_0)$ гомеоморфен декартову произведению $U_0 \times \mathbb{R}^1$. При переходе к другой карте U_k в качестве координаты слоя будет взята другая координата y_k , которая линейно выражается через y_0 . Таким образом, отображение $p: E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ является одномерным векторным расслоением.

2. Комплексное расслоение Хопфа. Это расслоение строится аналогично предыдущему примеру как одномерное комплексное векторное расслоение над базой $\mathbb{C}P^n$. В обоих случаях, вещественном и комплексном, соответствующие главные расслоения со структурными группами $O(1) = \mathbb{Z}_2$ и $U(1) = S^1$ могут быть отождествлены с подрасслоениями в векторном расслоении Хопфа. Дело в том, что структурная группа $O(1)$ может быть вложена в векторный слой \mathbb{R}^1 , $O(1) = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^1$, таким образом что линейное

действие $O(1)$ на R^1 совпадает на подмножестве $\{-1, 1\}$ с левыми сдвигами. Аналогично, группа $U(1) = S^1$ вкладывается в C^1 , $S^1 = \{z: |z| = 1\} \subset C^1$, а линейное действие группы $U(1)$ на C^1 совпадает на подмножестве S^1 с левыми сдвигами. Поэтому векторное расслоение Хопфа содержит ассоциированное с ним главное расслоение в качестве подрасслоения, состоящего из векторов единичной длины. Пусть $p: E_S \rightarrow RP^n$ — главное расслоение, ассоциированное с векторным расслоением Хопфа. Точки тотального пространства E_S — это пары (l, x) , l — прямая в R^{n+1} , а $x \in l$, $|x| = 1$. Поскольку $x \neq 0$, пара (l, x) однозначно определяется вектором x . Значит, тотальное пространство E_S гомеоморфно сфере единичного радиуса S^n , а главное расслоение $p: S^n \rightarrow RP^n$ — это двулистное накрытие.

В случае комплексного расслоения Хопфа, если $p: E_S \rightarrow CP^n$ — ассоциированное с ним главное расслоение, то $E_S = S^{2n+1}$, а в расслоении $p: S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ слоем является окружность S^1 .

Главные расслоения $S^n \rightarrow RP^n$, $S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ тоже называют *расслоениями Хопфа*. При $n=1$, $CP^1 = S^2$ получается классическое расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. В последнем случае полезно описать функции склейки на пересечении карт. Сферу S^3 будем считать заданной уравнением $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ в двумерном комплексном пространстве C^2 . Каждая точка сферы S^3 задается двумя комплексными координатами (z_0, z_1) . Отображение $p: S^3 \rightarrow CP^1 = S^2$ сопоставляет паре (z_0, z_1) точку с проективными координатами $[z_0: z_1]$. Зададим на CP^1 атлас, состоящий из двух карт

$$U_0 = \{[z_0: z_1]: z_0 \neq 0\},$$

$$U_1 = \{[z_0: z_1]: z_1 \neq 0\}.$$

Тогда точки карты U_0 параметризуются одним комплексным параметром $w_0 = z_1/z_0 \in C^1$, а точки карты U_1 — параметром $w_1 = z_0/z_1 \in C^1$. Пробразы $p^{-1}(U_0)$ и $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфны декартовым произведениям

$$\varphi_0: p^{-1}(U_0) \rightarrow S^1 \times C^1 = S^1 \times U_0,$$

$$\varphi_1: p^{-1}(U_1) = S^1 \times C^1 = S^1 \times U_1,$$

где

$$\varphi_0(z_0, z_1) = (z_0/|z_0|, z_1/z_0) = (z_0/|z_0|, [z_0: z_1]),$$

$$\varphi_1(z_0, z_1) = (z_1/|z_1|, z_0/z_1) = (z_1/|z_1|, [z_0: z_1]).$$

Отображения φ_0 и φ_1 , очевидно, обратимы:

$$\varphi_0^{-1}(\lambda, w_0) = (\lambda/\sqrt{1+|w_0|^2}, \lambda w_0/\sqrt{1+|w_0|^2}),$$

$$\varphi_1^{-1}(\lambda, w_1) = (\lambda w_1/\sqrt{1+|w_1|^2}, \lambda/\sqrt{1+|w_1|^2}).$$

Такии образом, функция склейки $\varphi_{01}: S^1 \times (U_0 \cap U_1) \rightarrow S^1 \times (U_0 \cap U_1)$ задается формулой

$$\varphi_{01}(\lambda, [z_0: z_1]) = (z_1|z_0|/z_0|z_1|, [z_0: z_1]), \quad (2)$$

т.е. является умножением на $z_1|z_0|/z_0|z_1| = w_1/|w_1|$.

3. Касательное расслоение проективного пространства. Пусть ξ_0 — комплексное расслоение Хопфа комплексного проективного пространства CP^n , TCP^n — касательное расслоение. Тогда имеет место изоморфизм

$$TCP^n \oplus \bar{1} = \xi^* \oplus \dots \oplus \xi^* = (n+1)\xi^*. \quad (3)$$

В случае $n = 1$ получается следующая формула:

$$TCP^1 \oplus \bar{1} = \xi^* \oplus \xi^*.$$

В самом деле, используя функцию замены координат $w_2 = 1/w_1$, получаем, что функция склейки для касательного расслоения TCP^1 имеет вид

$$\psi_{01}(w_1) = -1/w_1^2 = -\bar{w}_1^2/|w_1|^4, \quad (4)$$

а функция склейки расслоения Хопфа равна

$$\varphi_{01}(w_1) = w_1/|w_1|. \quad (5)$$

Используя гомотопии функций склейки, упростим формулы (4) и (5) до выражений

$$\psi_{01}(w_1) = \bar{w}_1^2, \quad \varphi_{01}(w_1) = w_1. \quad (6)$$

Остается усмотреть, что матричные функции

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & 0 \\ 0 & \bar{w}_1 \end{pmatrix}$$

гомотопны в классе обратимых матриц при $w_1 \neq 0, w_1 \in \mathbb{C}^1$.

В общем случае, для произвольной размерности n , заметим, что многообразие CP^n можно рассматривать как факторпространство сферы S^{2n+1} единичного радиуса в \mathbb{C}^{n+1} по действию группы $S^1 \subset \mathbb{C}^1$ комплексных чисел, по модулю равных 1. Тогда тотальное пространство касательного расслоения TCP^n является факторпространством множества всех касательных векторов к сфере, ортогональных к орбитам действия S^1 . Другими словами, тотальное пространство TCP^n имеет вид

$$TCP^n = \{(u, v): u, v \in \mathbb{C}^{n+1}, |u|=1, \langle u, v \rangle = 0\} / \{(\lambda u, \lambda v) \sim (u, v), \lambda \in S^1\},$$

где $\langle u, v \rangle$ — эрмитово произведение в \mathbb{C}^{n+1} . С другой стороны, тотальное пространство расслоения Хопфа можно описать как множество пар $\{(l, x): x \in l \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$. Рассмотрим факторпространство

$$A = \{(u, s): u \in \mathbb{C}^{n+1}, s \in \mathbb{C}^1, |u|=1\} / \{(\lambda u, \lambda s) \sim (u, s), \lambda \in S^1\}.$$

Сопоставим каждой паре $(u, s) \in A$ прямую l , проходящую через точку $\bar{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$, и вектор $s \bar{u} \in l$. Тогда, если $(\lambda u, \lambda s)$ — эквивалентная ей пара, то прямая, проходящая через точку $\overline{\lambda u}$, совпадает с прямой l , а вектор $(\lambda s)(\overline{\lambda u}) = \lambda \bar{\lambda} s \bar{u}$ совпадает с вектором $s \bar{u}$. Это значит, что пространство A гомеоморфно тотальному пространству расслоения ξ^* . Значит, тотальное пространство прямой суммы $(n+1)\xi^*$ можно отождествить с факторпространством

$$B = \{(u, v): u, v \in \mathbb{C}^{n+1}, |u|=1\} / \{(\lambda u, \lambda v) \sim (u, v), \lambda \in S^1\}.$$

Далее, пространство TCP^n лежит, очевидно, в пространстве B в виде подрасслоения. Дополнительное подрасслоение определяется множеством пар

$$\{(u, v): |u|=1, v = su, s \in \mathbb{C}^1\} / \{(\lambda u, \lambda v) \sim (u, v), \lambda \in S^1\},$$

которое гомеоморфно пространству

$$\{(u, s): |u|=1, s \in \mathbb{C}^1\} / \{\lambda u \sim u, \lambda \in S^1\}.$$

Последнее пространство гомеоморфно декартову произведению $CP^n \times \mathbb{C}^1$. Мы, таким образом, установили изоморфизм

$$TCP^n \oplus \bar{1} = (n+1)\xi^*.$$

4. Расслоения классических многообразий. Через $V_{n,k}$ обозначим пространство, точками которого служат ортонормированные системы из k векторов n -мерного евклидова пространства (\mathbb{R}^n или \mathbb{C}^n). В случае необходимости, будем ставить индекс: $V_{n,k}^{\mathbb{R}}$ или $V_{n,k}^{\mathbb{C}}$.

Через $G_{n,k}$ обозначим пространство, точками которого служат k -мерные линейные подпространства n -мерного евклидова пространства.

Дополняя k -репер до базиса в \mathbb{C}^n , мы получим, что пространство $V_{n,k}^{\mathbb{C}}$ отождествляется с однородным пространством $U(n)/U(k)$, где $U(k) \subset U(n)$ — естественное вложение унитарных матриц

$$A_k \rightarrow \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, пространство $G_{n,k}$ гомеоморфно однородному пространству $U(n)/(U(k) \oplus U(n-k))$, где $U(k) \oplus U(n-k) \subset U(n)$ — естественное вложение

$$(A_k, B_{n-k}) \rightarrow \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Вообще, если G — группа Ли, а H — ее некоторая замкнутая подгруппа Ли, то проекция

$$p: G \rightarrow G/H$$

является локально тривиальным расслоением (причем главным H -расслоением), поскольку ранг матрицы Якоби отображения p максимален в каждой точке и, следовательно, постоянен.

Из этого замечания вытекает, что следующие отображения тоже являются локально тривиальными расслоениями:

$$V_{n,k} \xrightarrow{V_{n-k_1}, k-k_1} V_{n,k_1}, \quad V_{n,k}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{U(k)} G_{n,k}^{\mathbb{C}}.$$

Над стрелкой указаны слои этих расслоений. В частности,

$$V_{n,n}^{\mathbb{R}} = O(n), \quad V_{n,n}^{\mathbb{C}} = U(n), \quad V_{n,1}^{\mathbb{R}} = S^{n-1}, \quad V_{n,1}^{\mathbb{C}} = S^{2n-1}.$$

Значит, имеются следующие локально тривиальные расслоения:

$$U(n) \xrightarrow{U(n-1)} S^{2n-1}, \quad O(n) \xrightarrow{O(n-1)} S^{n-1}.$$

Отображения в указанных расслоениях задаются путем сопоставления каждому реперу части его векторов.

Многообразие $V_{n,k}$ называется *многообразием Штифеля*, а $G_{n,k}$ — *многообразием Грассмана*.

В § 2 главы 1 (теорема 3) было показано, что если база локально тривиального расслоения, структурная группа которого G является группой Ли, имеет вид декартова произведения $B \times I$, то ограничения расслоения на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны. Это свойство локально тривиальных расслоений позволяет описать их в терминах гомотопических свойств топологических пространств.

§ 1. Классификационные теоремы

Будем считать, что база B локально тривиального расслоения $p: E \rightarrow B$ является клеточным пространством, т.е. пространство B является прямым пределом своих компактных подпространств $[B]^n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} [B]^n$, а каждое

подпространство $[B]^n$ получается из $[B]^{(n-1)}$ путем приклейки конечного числа дисков D_i^n размерности n с помощью непрерывных отображений границы $S_i^{(n-1)} \rightarrow [B]^{(n-1)}$. Подпространство $[B]^n$ называется n -мерным остовом пространства B . Фиксируем некоторое главное G -расслоение $p_G: E_G \rightarrow B_G$, у тотального пространства E_G которого все гомотопические группы тривиальны, $\pi_i(E_G) = 0, 0 \leq i < \infty$.

Т е о р е м а 1. Пусть B — клеточное пространство. Всякое главное G -расслоение $p: E \rightarrow B$ изоморфно прообразу расслоения p_G при некотором непрерывном отображении $f: B \rightarrow B_G$. Прообразы расслоения p_G при отображениях $f, g: B \rightarrow B_G$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения f и g гомотопны.

С л е д с т в и е 1. Множество всех классов изоморфных главных G -расслоений над базой B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов гомотопных отображений пространства B в пространство B_G .

С л е д с т в и е 2. Если клеточные пространства B и B' гомотопически эквивалентны, то множества классов изоморфных главных G -расслоений над базами B и B' находятся во взаимно однозначном соответствии, причем соответствие задается прообразами расслоений при гомотопической эквивалентности $B \rightarrow B'$.

С л е д с т в и е 3. Если пространство B_G является клеточным пространством, то оно однозначно определяется с точностью до гомотопической эквивалентности требованием $\pi_i(E_G) = 0, 0 \leq i < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Согласно теореме 2 § 2 главы 1 расслоение p изоморфно прообразу расслоения p_G при непрерывном отображении $f: B \rightarrow B_G$ тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение тотальных пространств этих расслоений.

Пусть B — клеточное пространство, $B_0 \subset B$ — его подпространство, т.е. такое замкнутое подмножество, которое является объединением части клеток пространства B . Рассмотрим главное G -расслоение $p: E \rightarrow B$. Обозначим

$E_0 = p^{-1}(B_0)$. Пусть $F_0: E_0 \rightarrow E_G$ — эквивариантное непрерывное отображение. Покажем, что отображение F_0 продолжается до непрерывного эквивариантного отображения $F: E \rightarrow E_G$.

Л е м м а. Любое главное G -расслоение p над диском D^n изоморфно тривиальному расслоению.

В самом деле, положим $h: D^n \times I \rightarrow D^n, h(x, t) = tx, 0 \leq t \leq 1, x \in D^n$. Тогда $h(x, 1) \equiv x, h(x, 0) \equiv 0$. Значит, согласно теореме 3 § 2 главы 1 прообразы расслоения p при отображениях $h_0(x) = h(x, 0)$ и $h_1(x) = h(x, 1)$ изоморфны. С другой стороны, прообраз расслоения p при тождественном отображении h_1 изоморфен p , а при отображении h_0 изоморфен тривиальному расслоению. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $(n-1)$ -мерный остов $[B]^{(n-1)}$ лежит в B_0 , а клетка D_i^n не лежит в B_0 . Пусть $\varphi_i: D_i^n \rightarrow B$ — отображение клетки D_i^n в $B, \varphi_i(S_i^{(n-1)}) \subset [B]^{(n-1)} \subset B_0$. Рассмотрим ограничение расслоения p на клетку D_i^n . Согласно лемме это ограничение является тривиальным расслоением $D_i^n \times G$. Поскольку $\varphi_i(S_i^{(n-1)}) \subset B_0$, то на подпространстве $S_i^{(n-1)} \times G$ отображение F_0 индуцирует эквивариантное отображение

$$F_0(x, g) = F_0(x, 1)g \in E_G, \quad x \in S_i^{(n-1)}, \quad g \in G.$$

Рассмотрим отображение

$$F_0(x, 1): S_i^{(n-1)} \rightarrow E_G.$$

Поскольку $\pi_{(n-1)}(E_G) = 0$ по предположению теоремы, то отображение $F_0(x, 1)$ продолжается до непрерывного отображения

$$F(x, 1): D_i^n \rightarrow E_G.$$

Положим

$$F(x, g) = F(x, 1)g, \quad x \in D_i^n, \quad g \in G.$$

Ясно, что отображение $F(x, g)$ эквивариантно и продолжает отображение F_0 на множество $p^{-1}(B_0 \cup D_i^n) \supset E_0$.

Индукцией по числу клеток доказывается существование эквивариантного отображения $F: E \rightarrow E_G$, продолжающего отображение F_0 .

Первое утверждение теоремы вытекает из доказанного, если положить $B_0 = \emptyset$.

Второе утверждение теоремы вытекает из доказанного, если заменить B на $B \times I$, а B_0 на $(B \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$. Теорема 1 доказана.

Следствия 1 и 2 непосредственно вытекают из теоремы 1.

Докажем следствие 3. Пусть $p: E_G \rightarrow B_G, p': E'_G \rightarrow B'_G$ — два главных G -расслоения, $\pi_i(E_G) = \pi_i(E'_G) = 0, B_G, B'_G$ — клеточные пространства. К каждому из расслоений p и p' можно применить теорему 1. Тогда существуют такие отображения

$$f: B_G \rightarrow B'_G, \quad g: B'_G \rightarrow B_G,$$

что при отображении f расслоение p переходит в расслоение p , а при отображении g расслоение p переходит в расслоение p' . Тогда при отображении $gf: B_G \rightarrow B_G$ расслоение p переходит в себя, т.е. по теореме 1 отображение gf гомотопно тождественному отображению. Аналогично, отображение $fg: B'_G \rightarrow B'_G$ тоже гомотопно тождественному отображению.

Расслоение $p: E_G \rightarrow B_G$ называется универсальным главным G -расслоением, а база B_G называется классифицирующим пространством для главных G -расслоений.

Переходя к произвольному слою F с действием группы G на нем, мы получаем классификационные теоремы для локально тривиальных расслоений со слоем F и структурной группой G .

§ 2. Точная гомотопическая последовательность

Как показано в теореме § 1, для построения универсального главного G -расслоения необходимо уметь вычислять гомотопические группы тотального пространства расслоения.

О п р е д е л е н и е. Отображение $p: X \rightarrow Y$ топологических пространств удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии, если для любого конечного клеточного пространства P , любой гомотопии

$$f: P \times I \rightarrow Y$$

и любого отображения $g_0: P \times \{0\} \rightarrow Y$ такого, что $pg_0(x, 0) = f(x, 0)$, существует продолжение $g: P \times I \rightarrow Y$, удовлетворяющее соотношению

$$pg(x, t) = f(x, t), \quad x \in P, \quad t \in I. \quad (1)$$

Если отображения f и g удовлетворяют условию (1), то говорят, что отображение g накрывает отображение f (относительно p). Таким образом, аксиома о накрывающей гомотопии утверждает, что если отображение g_0 накрывает отображение $f(x, 0)$, то и вся гомотопия $f(x, t)$ накрывается некоторой гомотопией.

Т е о р е м а 1. Пусть $p: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение. Тогда оно удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $E = B \times F$ — тривиальное расслоение. Тогда накрывающее отображение g_0 может быть задано формулой

$$g_0(x, 0) = (f(x, 0), h(x, 0)).$$

Положим

$$g(x, t) = (f(x, t), h(x, 0)).$$

Получим отображение g , накрывающее гомотопию f . Далее, пусть $P_0 \subset P$ — клеточное подпространство и на нем уже задана гомотопия $g_0: P_0 \times I \rightarrow E = B \times F$, накрывающая отображение f . Другими словами, накрывающее отображение задано на подпространстве $(P_0 \times I) \cup (P \times \{0\}) \subset P \times I$. Требуется продолжить отображение g_0 до накрывающего отображения $g: P \times I \rightarrow E$. Заметим, что продолжение отображения g_0 достаточно построить на одной клетке $D_i^k \times I \subset P \times I$.

Ограничение отображения g_0 определяет накрывающее отображение на подмножестве $(D_i^k \times \{0\}) \cup (S_i^{(k-1)} \times I)$, которое имеет вид "стакана", "дно" которого равно $D_i^k \times \{0\}$, а "стенки" — это $S_i^{(k-1)} \times I$. Декартово произведение $D_i^k \times I$ гомеоморфно самому себе таким образом, что при этом гомеоморфизме множество $(D_i^k \times \{0\}) \cup (S_i^{(k-1)} \times I)$ переходит в "дно" $D_i^k \times \{0\}$ (рис.2). Значит, задача продолжения накрывающего отображения g_0 с множества $(D_i^k \times \{0\}) \cup (S_i^{(k-1)} \times I)$ на все декартово произведение $D_i^k \times I$ эквивалентна задаче продолжения накрывающего отображения с множества $D_i^k \times \{0\}$ на множество $D_i^k \times I$.

Последняя задача уже решена.

Чтобы завершить полностью доказательство, рассмотрим такое мелкое клеточное разбиение клеточного пространства P и такое мелкое разбиение отрезка I на конечное семейство мелких отрезков I_k , чтобы при отобра-

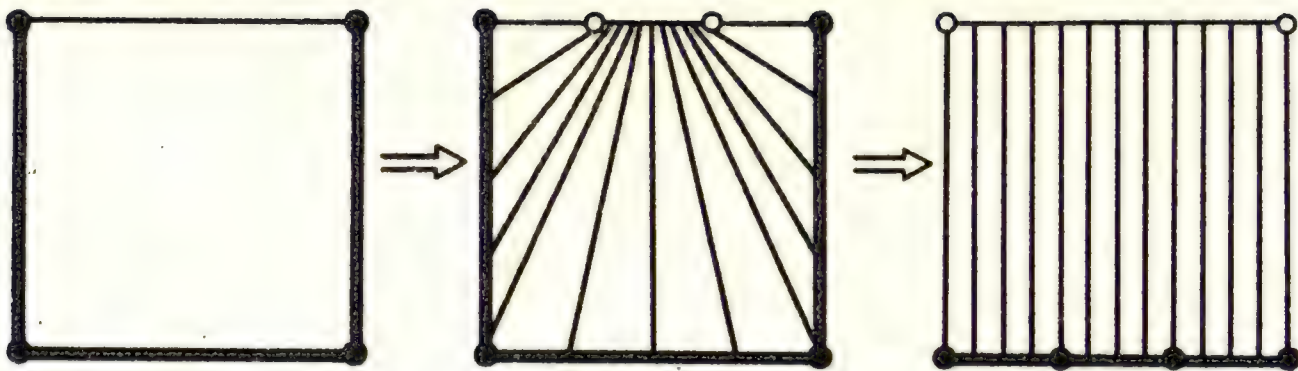


Рис. 2.

жении f произведение клетки D^n пространства P на отрезок I_k отображалось в одну карту расслоения p . Тогда ограничение отображения f на $D_n \times I_k$ отображает его в одну карту U , а накрытие g — в тотальное пространство расслоения $p|p^{-1}(U)$, которое является уже тривиальным расслоением, т.е. задача сводится к уже рассмотренной ранее. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $p: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение, $x_0 \in B$, $y_0 \in p^{-1}(x_0) = F$, $j: F \rightarrow E$ — естественное вложение слоя в тотальное пространство. Тогда существует такой гомоморфизм гомотопических групп

$$\partial: \pi_k(B, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, y_0),$$

что последовательность гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_k(F, y_0) &\xrightarrow{j_*} \pi_k(E, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B, x_0) \xrightarrow{\partial} \\ &\xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, y_0) \xrightarrow{j_*} \pi_{k-1}(E, y_0) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \pi_1(E, y_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0) \end{aligned} \quad (2)$$

является точной последовательностью групп.

Доказательство. Под k -мерной гомотопической группой $\pi_k(X, x_0)$ пространства X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ мы будем понимать множество гомотопических классов отображений k -мерной сферы S^k с отмеченной точкой s_0 (гомотопии рассматриваются в том же классе отображений, т.е. таких отображений, при которых точка s_0 переходит в точку x_0). Вместо отображения сферы S^k можно рассматривать отображения диска D^k , граница которого целиком отображается в отмеченную точку x_0 . Вместо диска D^k можно рассматривать k -мерный куб $I^k = I \times I \times \dots \times I$ (k раз), граница которого отображается в точку x_0 .

Построим отображение ∂ . Пусть $\varphi: I^k \rightarrow B$ — представитель элемента группы $\pi_k(B, x_0)$. Представим куб I^k в виде произведения $I^k = I^{k-1} \times I$. Поскольку граница ∂I^k отображается целиком в точку x_0 , то, в частности,

$$\varphi(I^{k-1} \times \{0\}) = \varphi(I^{k-1} \times \{1\}) = x_0.$$

Будем считать, что φ есть гомотопия отображения куба I^{k-1} . Пусть $\psi(u, 0) \equiv y_0, u \in I^{k-1}$. Значит, отображение $\psi(u, 0)$ накрывает отображение $\varphi(u, 0)$. В силу аксиомы о накрывающей гомотопии отображение ψ может быть продолжено на $I^{k-1} \times I$, причем $\psi(u, t)$ будет накрывать $\varphi(u, t)$. В частности, при $t = 1$ отображение $\psi(u, 1)$ накрывает $\varphi(u, 1) \equiv x_0$. Это значит, что отображение $\psi(u, 1): I^{k-1} \rightarrow E$ на самом деле отображает куб I^{k-1} в слой F . При этом, поскольку $\varphi(\partial I^{k-1} \times I) = x_0$, то накрытие ψ можно выбрать таким образом, что $\psi(\partial I^{k-1} \times I) \equiv y_0$. Значит, $\psi(u, 1)$ отображает куб I^{k-1} в слой F , а его границу ∂I^{k-1} в отмеченную точку

Y_0 , т.е. отображение $\psi(u, 1)$ представляет некоторый элемент группы $\pi_{k-1}(F, Y_0)$. Требуется проверить корректность данного определения, т.е. что если φ и φ' — гомотопные отображения, то соответствующие накрывающие отображения ψ и ψ' тоже гомотопны. Конструкция гомотопии Ψ между отображениями ψ и ψ' точно такая же: гомотопия Ψ строится как накрывающее отображение для гомотопии Φ между φ и φ' . Таким образом, соответствие $\varphi \rightarrow \psi$ корректно задает отображение $\partial: \pi_k(B, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, Y_0)$. Доказательство аддитивности мы опускаем.

Итак, нам остается доказать точность последовательности (2), т.е. что ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего. Проверку точности последовательности проведем в три этапа.

Точность в члене $\pi_k(E, Y_0)$. Если $\varphi: S^k \rightarrow F$ представляет элемент из группы $\pi_k(F, Y_0)$, то отображение $pj\varphi: S^k \rightarrow B$ представляет образ этого элемента при гомоморфизме p_*j_* . Поскольку $p(F) = x_0$, то $pj\varphi(S^k) = x_0$. Значит, $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } p_*$. Обратно, пусть $\varphi: S^k \rightarrow E$ — такое отображение, что отображение $p\varphi$ гомотопно постоянному отображению (т.е. $[\varphi] \in \text{Ker } p_*$). Если Φ — гомотопия между отображением $p\varphi$ и постоянным отображением, то в силу аксиомы о накрывающей гомотопии существует гомотопия Ψ , накрывающая гомотопию Φ , между отображением φ и некоторым отображением φ' , накрывающим постоянное отображение. Таким образом, получаем, что $p\varphi'(S^k) = x_0$, т.е. $\varphi'(S^k) \subset F$. Значит, элемент, представляемый отображением φ' , принадлежит образу $\text{Im } j_*$, $[\varphi] \in \text{Im } j_*$, т.е. $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } j_*$.

Точность в члене $\pi_k(B, x_0)$. Пусть $\varphi: I^k \rightarrow E$ представляет элемент группы $\pi_k(E, Y_0)$. Тогда композиция $p\varphi: I^k = I^{k-1} \times I \rightarrow B$ накрывается отображением φ . По определению ограничение $\varphi(u, 1): I^{k-1} \rightarrow F \subset E$ представляет элемент $\partial[p\varphi]$. Поскольку $\varphi(u, 1) \equiv Y_0$, то $\partial p_*[\varphi] = 0$.

Пусть отображение $\varphi: I^k = I^{k-1} \times I \rightarrow B$ представляет элемент группы $\pi_k(B, x_0)$, отображение $\psi: I^{k-1} \times I \rightarrow E$ накрывает отображение φ , ограничение $\psi(u, 1)$ представляет элемент $\partial[\varphi]$. Если отображение $\psi(u, 1): I^{k-1} \rightarrow F$ гомотопно постоянному отображению, то существует гомотопия $\psi': I^{k-1} \times I \rightarrow F$ между отображением $\psi(u, 1)$ и постоянным отображением. Составим новое отображение $\psi'': I^{k-1} \times I \rightarrow E$,

$$\psi''(u, t) = \begin{cases} \psi(u, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \psi'(u, 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$p\psi''(u, t) = \begin{cases} \varphi(u, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ x_0, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Значит, отображение $p\psi''$ гомотопно отображению φ , т.е. $p_*[\psi''] = [\varphi]$, или $\text{Ker } \partial \in \text{Im } p_*$.

Точность в члене $\pi_k(F, Y_0)$. Пусть отображение $\varphi: I^{k+1} = I^k \times I \rightarrow B$ представляет элемент группы $\pi_{k+1}(B, x_0)$, отображение $\psi: I^k \times I \rightarrow E$ накрывает отображение φ , ограничение $\psi(u, 1)$ представляет элемент $\partial([\varphi]) \in \pi_k(F, Y_0)$. Тогда элемент $j_*\partial([\varphi])$ представлен отображением $\psi(u, 1)$, которое гомотопно постоянному отображению $\psi(u, 0)$, т.е. $j_*\partial([\varphi]) = 0$. Обратно, если $\varphi: I^k \times I \rightarrow E$ — гомотопия между $\varphi(u, 1) \subset F$ и постоянным отображением $\varphi(u, 0)$, то по определению отображение $\varphi(u, 1)$ представляет элемент $\partial([p\varphi])$. Значит, $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } \partial$. Теорема 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если через $\pi_0(X, x_0)$ обозначить множество компонент линейной связности пространства X с отмеченным элементом $[x_0]$ — ком-

понентой линейной связности, содержащей точку x_0 — то точную последовательность (2) можно продолжить:

$$\pi_1(E, y_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_0(F, y_0) \rightarrow \pi_0(E, y_0) \rightarrow \pi_0(B, x_0).$$

Эта последовательность точна в том смысле, что образ предыдущего отображения совпадает с прообразом отмеченного элемента при последующем отображении.

Примеры. 1. Рассмотрим накрытие $R^1 \rightarrow S^1$, слоем которого является дискретное пространство Z целых чисел. Точная гомотопическая последовательность

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_k(Z) \rightarrow \pi_k(R^1) \rightarrow \pi_k(S^1) \rightarrow \pi_{k-1}(Z) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(R^1) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(Z) \rightarrow \pi_0(R^1) \rightarrow \pi_0(S^1) \end{aligned}$$

имеет следующий конкретный вид:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_k(S^1) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow Z \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

поскольку $\pi_k(R^1) = 0$, $k \geq 0$, $\pi_k(Z) = 0$, $k \geq 1$. Поэтому $\pi_1(S^1) = Z$, $\pi_k(S^1) = 0$ при $k \geq 1$.

2. Рассмотрим расслоение Хопфа $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 . Точная гомотопическая последовательность

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3) \rightarrow \pi_1(S^2) \end{aligned}$$

имеет следующий конкретный вид:

$$\rightarrow 0 \rightarrow Z \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow Z \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

поскольку $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = \pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = \pi_1(S^2) = 0$. Значит, $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = Z$, $\pi_3(S^2) = Z$. Пространство S^2 дает простейший пример, когда имеются нетривиальные гомотопические группы, размерность которых больше размерности пространства.

Отметим также, что образующая группы $\pi_3(S^2) = Z$ представляется самим расслоением Хопфа $p: S^3 \rightarrow S^2$. В самом деле, из точной последовательности следует, что образующая группа $\pi_3(S^3)$ отображается в образующую группы $\pi_3(S^2)$ при гомоморфизме p_* . Поскольку образующая группы $\pi_3(S^3)$ представляется тождественным отображением $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$, то $p_*[\varphi] = [p\varphi] = [p]$.

3. В общем случае имеем вещественное расслоение Хопфа $S^n \rightarrow RP^n$ со слоем Z_2 и комплексное расслоение Хопфа $S^{2n-1} \rightarrow CP^n$ со слоем S^1 . Из точных гомотопических последовательностей получаем при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \pi_1(S^n) = 0 &\rightarrow \pi_1(RP^n) \rightarrow \pi_0(Z_2) = Z_2 \rightarrow 0, \quad \pi_1(RP^n) = Z_2, \\ \pi_k(S^n) = 0 &\rightarrow \pi_k(RP^n) \rightarrow \pi_{k-1}(Z_2) = 0, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Значит, $\pi_k(RP^n) = 0$, $2 \leq k \leq n-1$. Если $n = 1$, то $RP^1 = S^1$.

В комплексном случае имеем

$$\begin{aligned} \pi_2(S^{2n-1}) = 0 &\rightarrow \pi_2(CP^n) \rightarrow \pi_1(S^1) = Z \rightarrow \pi_1(S^{2n-1}) = 0 \rightarrow \pi_1(CP^n) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_0(S^1) \rightarrow 0, \\ \pi_1(CP^n) = 0, \quad \pi_2(CP^n) &= Z, \\ \pi_k(S^{2n-1}) = 0 &\rightarrow \pi_k(CP^n) \rightarrow \pi_{k-1}(S^1) = 0 \end{aligned}$$

при $2n-1 > k > 2$. Значит, при $3 \leq k < 2n-1$ имеем $\pi_k(CP^n) = 0$.

4. Рассмотрим естественное вложение матричных групп $j: O(n) \rightarrow O(n+1)$. Как было показано в предыдущей главе, вложение j задает слой расслоения $p: O(n+1) \rightarrow S^n$. Поэтому имеется точная гомотопическая последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^n) \rightarrow \pi_k(O(n)) \xrightarrow{j_*} \pi_k(O(n+1)) \rightarrow \pi_k(S^n) \rightarrow \dots$$

Если $k+1 < n$, т.е. $k \leq n-2$, то $\pi_k(O(n)) \approx \pi_k(O(n+1))$. Следовательно, $\pi_k(O(k+2)) \approx \pi_k(O(k+3)) \approx \pi_k(O(N))$ для $N \geq k+2$. Это свойство называется *свойством стабилизации гомотопических групп серии ортогональных групп*. В частности, при $k=1$ получаем следующий список:

$$\pi_1(O(1)) = 0, \quad \pi_1(O(2)) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(O(3)) = \pi_1(O(4)) = \dots = \pi_1(O(n)).$$

Линейная компонента связности группы $O(3)$ есть группа $SO(3)$. Группу же $SO(3)$ отождествим с проективным пространством RP^3 следующим образом. Всякое ортогональное преобразование $A \in SO(3)$ есть поворот трехмерного пространства R^3 вокруг некоторой оси l на некоторый угол ω . Направление поворота вместе с его величиной можно задать вектором $\omega \in l$, длина которого равна ω , $0 \leq \omega \leq \pi$. Поскольку повороты на углы π и $-\pi$ задают одно и то же преобразование пространства R^3 , то множество всех поворотов отождествляется с диском D^3 радиуса π , на границе которого противоположные точки отождествляются. Таким образом, если диск D^3 считать частью сферы S^3 , то отождествление противоположных точек на границе согласуется с отождествлением противоположных точек на сфере. Значит, после описанного отождествления мы получаем проективное пространство RP^3 . Таким образом, для вычисления группы $\pi_1(O(n))$ достаточно вычислить группу $\pi_1(RP^3) = \mathbb{Z}_2$. Значит, $\pi_1(O(n)) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$. Более того, вложение $j: O(2) \rightarrow O(3)$ ведет себя следующим образом: точна последовательность

$$\mathbb{Z} = \pi_1(O(2)) \rightarrow \pi_1(O(3)) = \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Значит, гомоморфизм

$$j_*: \pi_1(O(2)) \rightarrow \pi_1(O(3))$$

является эпиморфизмом группы \mathbb{Z} на группу \mathbb{Z}_2 .

5. Рассмотрим естественное вложение матричных групп $j: U(n) \rightarrow U(n+1)$, соответствующее вложению слоя в расслоении $p: U(n+1) \rightarrow S^{2n+1}$. Из точной гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_k(U(n)) \xrightarrow{j_*} \pi_k(U(n+1)) \rightarrow \pi_k(S^{2n+1}) \rightarrow \dots$$

следует, что при $k < 2n$ имеет место изоморфизм

$$j_*: \pi_k(U(n)) \rightarrow \pi_k(U(n+1)).$$

Значит, полагая $k=1$, получаем, что

$$\pi_1(U(1)) = \pi_1(U(2)) = \dots = \pi_1(U(n)).$$

Поскольку $U(1) = S^1$, то $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$, т.е. $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$ для любого номера n . Полагая $k=2$, получаем, что $\pi_2(U(2)) = \pi_2(U(3)) = \dots = \pi_2(U(n))$. Более того, для $n=1$ точная гомотопическая последовательность имеет вид

$$\dots \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_2(U(1)) \rightarrow \pi_2(U(2)) \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \dots$$

или

$$0 \rightarrow \pi_2(U(2)) \rightarrow 0,$$

т.е. $\pi_2(U(2)) = 0$. Значит, $\pi_2(U(n)) = 0$ для любого номера n .

Вычислим теперь группы $\pi_3(U(n))$. При $n \geq 2$ имеем $\pi_3(U(2)) = \pi_3(U(n))$. Группа $U(2)$ имеет подгруппу $SU(2)$ всех унитарных матриц с единичным детерминантом. Отображение $p: U(2) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}^1$, сопоставляющее унитарной матрице ее детерминант, является локально тривиальным расслоением со слоем $SU(2)$. Таким образом, в точной гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_4(S^1) \rightarrow \pi_3(SU(2)) \rightarrow \pi_3(U(2)) \rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \dots$$

крайние члены равны нулю, так что $\pi_3(SU(2)) = \pi_3(U(2))$. Матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ из группы } SU(2) \text{ задаются соотношениями } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, |\gamma|^2 +$$

$|\delta|^2 = 1, \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta = 0, \alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Поэтому коэффициенты γ, δ однозначно восстанавливаются с помощью коэффициентов α и β . Значит, группа $SU(2)$ гомеоморфна трехмерной сфере $S^3 \in \mathbb{C}^2$, а поэтому $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$\pi_3(U(n)) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \mathbb{Z}, & n \geq 2. \end{cases}$$

6. Аналогично двум предыдущим примерам рассмотрим расслоение $p: Sp(n) \rightarrow S^{4n-1}$ со слоем $Sp(n-1)$, где $Sp(n)$ — группа симплектических преобразований n -мерного кватернионного пространства \mathbb{K}^n , которые одновременно являются ортогональными преобразованиями. Каждая матрица из группы $Sp(n)$ состоит из столбцов, образующих ортонормированный симплектический базис пространства $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{4n}$. Отображение p сопоставляет матрице ее первый столбец. Точная гомотопическая последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{4n-1}) \rightarrow \pi_k(Sp(n-1)) \rightarrow \pi_k(Sp(n)) \rightarrow \pi_k(S^{4n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(Sp(n-1)) \rightarrow \pi_1(Sp(n)) \rightarrow \pi_1(S^{4n-1}) \rightarrow 0$$

дает нам следующую таблицу изоморфизмов:

$$\pi_k(Sp(n)) = \pi_k(Sp(n-1)) \text{ при } k < 4n-2,$$

$$\pi_1(Sp(n)) = \pi_1(Sp(1)) = \pi_1(S^3) = 0,$$

$$\pi_2(Sp(n)) = \pi_2(Sp(1)) = \pi_2(S^3) = 0,$$

$$\pi_3(Sp(n)) = \pi_3(Sp(1)) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}.$$

7. Пусть $p: E_G \rightarrow B_G$ — универсальное главное G -расслоение. Применяя точную гомотопическую последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_k(E_G) \rightarrow \pi_k(B_G) \rightarrow \pi_{k-1}(G) \rightarrow \pi_{k-1}(E_G) \rightarrow \dots,$$

получаем

$$\pi_k(B_G) \approx \pi_{k-1}(G),$$

поскольку $\pi_k(E_G) = 0$ для всех $k \geq 0$. Например, если $G = S^1$, то пространство B_{S^1} можно получить как прямой предел $CP^\infty = \varinjlim CP^n$, а пространство E_{S^1} — как прямой предел $S^\infty = \varinjlim S^{2n+1}$. При этом

$$\pi_k(CP^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Поскольку классификация одномерных векторных комплексных рассло-

ний сводится к классификации главных S^1 -расслоений, одномерные комплексные векторные расслоения с базой X классифицируются множеством $[X, \mathbb{C}P^\infty]$ классов гомотопных отображений пространства X в $\mathbb{C}P^\infty$. С другой стороны, пространство $\mathbb{C}P^\infty$ является комплексом Эйленберга — Маклейна $K(\mathbb{Z}, 2)$, которое классифицирует двумерные целочисленные когомологии пространства X . Значит, множество одномерных комплексных векторных расслоений изоморфно группе $H^2(X, \mathbb{Z})$. Рассмотрим гомоморфизм групп

$$\varphi: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1,$$

задаваемый формулой $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 z_2$. Соответствующая операция векторных расслоений — это тензорное произведение одномерных расслоений. Гомоморфизм φ порождает отображение классифицирующих пространств

$$\psi: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty,$$

при котором универсальное расслоение ξ переходит в тензорное произведение $\xi_1 \otimes \xi_2$ универсальных расслоений над сомножителями:

$$\xi_1 \otimes \xi_2 = \psi^*(\xi).$$

Далее, $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а гомоморфизм $\varphi_*: \pi_1(S^1 \times S^1) \rightarrow \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ задается, очевидно, формулой $\varphi_*(x, y) = x + y$. Следовательно, гомоморфизм

$$\psi_*: \pi_2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P^\infty)$$

тоже задается формулой $\psi_*(x, y) = x + y$, где

$$(x, y) \in \pi_2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \oplus \pi_2(\mathbb{C}P^\infty).$$

Поэтому аналогичная формула справедлива для гомоморфизма в гомологиях

$$\psi_*: H_2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^\infty).$$

Значит, в когомологиях гомоморфизм

$$\psi^*: H^2(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = H^2(\mathbb{C}P^\infty) \oplus H^2(\mathbb{C}P^\infty)$$

определяется по формуле $\psi^*(x) = (x, x)$. Таким образом, если $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ — два отображения, $a \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ — образующий элемент, $\xi_1 = f^*(\xi)$, $\xi_2 = g^*(\xi)$, $a_1 = f^*(a) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, $a_2 = g^*(a) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, то отображение h , классифицирующее расслоение $\xi_1 \otimes \xi_2$, является композицией отображений

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}P^\infty.$$

Тогда $\xi_1 \otimes \xi_2 = h^*(\xi)$, $h^*(a) = a_1 + a_2$. Тем самым доказано, что мультипликативная структура в множестве одномерных комплексных расслоений совпадает с аддитивной структурой в двумерной группе $H^2(X, \mathbb{Z})$ когомологий пространства X с целочисленными коэффициентами.

§ 3. Конструкции классифицирующих пространств

В этом параграфе мы выясним, существует ли универсальное главное G -расслоение $p_G: E_G \rightarrow B_G$.

Имеются по крайней мере две геометрические конструкции универсального G -расслоения. Задача заключается в том, чтобы для группы G построить стягиваемое пространство E_G со свободным действием группы G .

Пусть сначала $G \cong U(n)$. Рассмотрим группу $U(N+n)$ и ее подгруппу $U(N)$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, $X \in U(N)$. Будем считать, что группа $U(n)$ тоже вложена в группу $U(N+n)$ как подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y \in U(n)$. Тогда подгруппы $U(n)$ и $U(N)$ коммутируют и, значит, группа $U(n)$ действует с помощью левых сдвигов на однородном пространстве левых классов смежности $U(N+n)/U(N)$. Это действие свободно, и факторпространство гомеоморфно однородному пространству $U(N+n)/(U(N) \oplus U(n))$ левых классов смежности по подгруппе $U(N) \oplus U(n)$. Таким образом, получаем главное $U(n)$ -расслоение

$$U(N+n)/U(N) \xrightarrow{p} U(N+n)/(U(N) \oplus U(n)).$$

Нетрудно убедиться, что тотальное пространство этого расслоения гомеоморфно комплексному многообразию Штифеля $V_{N+n,n}$, а база гомеоморфна комплексному многообразию Грассмана $G_{N+n,n}$. Рассмотрим вложение $j: U(N+n) \rightarrow U(N+n+1)$ с помощью соответствия

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T \in U(N+n).$$

Тогда подгруппа $U(N)$ вкладывается в подгруппу $U(N+1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем подгруппа $U(n)$ переходит в себя при указанном вложении. Значит, вложение j порождает вложение главных $U(n)$ -расслоений

$$\begin{array}{ccc} U(N+n)/U(N) & \xrightarrow{j} & U(N+n+1)/U(N+1) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ U(N+n)/(U(N) \oplus U(n)) & \xrightarrow{j} & U(N+n+1)/(U(N+1) \oplus U(n)) \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccc} V_{N+n,n} & \xrightarrow{j} & V_{N+n+1,n} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ G_{N+n,n} & \xrightarrow{j} & G_{N+n+1,n} \end{array}$$

Обозначим через $V_{\infty,n}$ прямой предел $\varinjlim V_{N+n,n}$, через $G_{\infty,n}$ — прямой предел $\varinjlim G_{N+n,n}$, а через

$$p: V_{\infty,n} \rightarrow G_{\infty,n}$$

— соответствующее отображение. Это отображение является главным $U(n)$ -расслоением. В самом деле, достаточно усмотреть, что отображение $p: V_{\infty,n} \rightarrow G_{\infty,n}$ является локально тривиальным расслоением. Заметим, что по определению прямого предела множества $U \subset G_{\infty,n}$ называется открытым, если пересечение $U \cap G_{N+n,n}$ открыто в $G_{N+n,n}$ для любого N . Поэтому

достаточно для каждой точки $x \in G_{\infty, n}$ найти открытую окрестность U , для которой $p^{-1}(U)$ эквивариантно гомеоморфно декартову произведению $U \times U(n)$. Пусть N_0 — такой номер, что $x \in G_{N_0+n, n}$, и $\Omega_{N_0} \subset G_{N_0+n, n}$ — такое открытое множество, что $p^{-1}(\Omega_{N_0})$ гомеоморфно $\Omega_{N_0} \times U(n)$. Пусть $x \in \Omega'_{N_0} \subset \bar{\Omega}'_{N_0} \subset \Omega_{N_0}$ — меньшая окрестность. Очевидно, что найдется такая окрестность $\Omega_{N_0+1} \subset G_{N_0+n+1, n}$, $\bar{\Omega}'_{N_0} \subset \Omega_{N_0+1}$, что гомеоморфизм $p^{-1}(\bar{\Omega}'_{N_0}) \rightarrow \bar{\Omega}'_{N_0} \times U(n)$ продолжается до гомеоморфизма $p^{-1}(\Omega_{N_0+1}) \rightarrow \Omega_{N_0+1} \times U(n)$. Повторяя конструкцию продолжения гомеоморфизма, мы получим последовательность множеств $\Omega_{N_0+k} \subset G_{N_0+k+n, n}$, открытых в $G_{N_0+k+n, n}$, $\bar{\Omega}_{N_0+k} \subset \Omega_{N_0+k+1}$, в систему гомеоморфизмов $p^{-1}(\Omega_{N_0+k}) \rightarrow \Omega_{N_0+k} \times U(n)$, продолжающих друг друга. Пусть, наконец, $U = \bigcup_k \Omega_{N_0+k}$. Тогда U — открытое множество, $x \in U$, а множество $p^{-1}(U)$ гомеоморфно декартову произведению $U \times U(n)$, что и требовалось доказать.

Покажем, что гомотопические группы $\pi_k(V_{\infty, n})$ тривиальны. Рассмотрим расслоение $U(N+n) \rightarrow V_{N+n, n}$ со слоем $U(N)$. Вложение $j: U(N) \rightarrow U(N+n)$ слоя $U(N)$ в тотальное пространство $U(N+n)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп для $k < 2N$ (см. пример 5 предыдущего параграфа). Значит, из точной гомотопической последовательности

$$\begin{aligned} &\rightarrow \pi_k(U(N)) \rightarrow \pi_k(U(N+n)) \rightarrow \pi_k(V_{N+n, n}) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_{k-1}(U(N)) \rightarrow \pi_{k-1}(U(N+n)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

получаем, что $\pi_k(V_{N+n, n}) = 0$ для всех $k < 2N$. Поскольку $\pi_k(V_{\infty, n}) = \varinjlim \pi_k(V_{N+n, n})$, то $\pi_k(V_{\infty, n}) = 0$ для любого k .

Таким образом, мы показали, что в случае группы $G = U(n)$ существует универсальное главное $U(n)$ -расслоение, именно, $p: V_{\infty, n} \rightarrow G_{\infty, n}$.

Пусть теперь $G \subset U(n)$ — замкнутая подгруппа. Поскольку для группы $U(n)$ существует универсальное главное $U(n)$ -расслоение $p: V_{\infty, n} \rightarrow G_{\infty, n}$, то группа $U(n)$ свободно действует на пространстве $V_{\infty, n}$. Значит, подгруппа G тоже действует на этом же пространстве $V_{\infty, n}$, причем это действие тоже свободно. Пусть $B_G = V_{\infty, n}/G$ — пространство орбит действия подгруппы G . Отображение

$$p_G: V_{\infty, n} \rightarrow B_G$$

является локально тривиальным главным G -расслоением. В самом деле, пусть $y \in B_G$, $x \in V_{\infty, n}$, $[x]_G = y$, где $[x]_G$ — орбита действия группы G . Поскольку отображение $p: V_{\infty, n} \rightarrow G_{\infty, n}$ является локально тривиальным расслоением, то существует такая эквивариантная окрестность W точки x , что

$$W \approx U(n) \times W_0, \quad W_0 \subset G_{\infty, n}.$$

Тогда открытое множество $U(n)/G \times W_0$, лежащее в пространстве B_G , содержит точку y , а ограничение отображения p_G на подмножество W :

$$p_G|_W: W = U(n) \times W_0 \rightarrow U(n)/G \times W_0$$

является локально тривиальным главным G -расслоением (см. § 6 главы 1, пример 4). Значит, все отображение p_G является локально тривиальным расслоением.

Следует заметить, что если подгруппа $H \subset G$ является деформационным ретрактом группы G (т.е. группа G стягивается по себе к подгруппе H , или, что то же самое, вложение $H \rightarrow G$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп), то соответствующие классифицирующие пространства B_G и B_H (слабо) гомотопически эквивалентны^{*}). В самом деле, рассмотрим коммутативную диаграмму, составленную из двух точных гомотопических последовательностей для расслоений и их отображений:

$$\begin{array}{ccc} E_H & \longrightarrow & E_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_H & \longrightarrow & B_G \end{array} \quad (1)$$

Эта диаграмма имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_k(H) & \longrightarrow & \pi_k(E_H) & \longrightarrow & \pi_k(B_H) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(H) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & \pi_k(G) & \longrightarrow & \pi_k(E_G) & \longrightarrow & \pi_k(B_G) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(G) & \longrightarrow \end{array} \quad (2)$$

Поскольку $\pi_k(E_H) = \pi_k(E_G) = 0$ для всех k , а отображение $\pi_{k-1}(H) \rightarrow \pi_{k-1}(G)$ является изоморфизмом, то и отображение $\pi_k(B_H) \rightarrow \pi_k(B_G)$ тоже является изоморфизмом. Из этой же диаграммы следует, что если известно, что существует универсальное расслоение $p_H: E_H \rightarrow B_H$ для подгруппы $H \subset G$ и H является деформационным ретрактом группы G , то существует универсальное расслоение и для группы G . Для этого положим $B_G = B_H$, а E_G построим как расслоение, ассоциированное с расслоением p_H , но с новым слоем G . Очевидно, что полученное расслоение $p_G: E_G \rightarrow B_G$ будет главным G -расслоением, поскольку функции склейки принимают свои значения в группе гомеоморфизмов, являющихся левыми сдвигами группы G по себе. Очевидно также, что для этих расслоений существует диаграмма вида (1). Из диаграммы точных последовательностей (2) вытекает, что $\pi_k(B_H) = \pi_{k-1}(H)$ (поскольку $\pi_k(E_H) = 0$). Далее, по условию $\pi_{k-1}(G) = \pi_{k-1}(H)$. По построению $\pi_k(B_H) = \pi_k(B_G)$. Значит, отображение $\pi_k(B_G) \rightarrow \pi_{k-1}(G)$ является изоморфизмом, а поэтому $\pi_k(E_G) = 0$. Последнее равенство означает, что построенное главное G -расслоение является универсальным.

Из всех приведенных выше соображений следует, что для любой конечномерной матричной группы Ли G существует универсальное G -расслоение.

В самом деле, для всякой матричной группы G ее максимальная компактная подгруппа $K \subset G$ является ее деформационным ретрактом, а всякая компактная группа Ли K изоморфна подгруппе K' в унитарной группе, т.е. $K' \subset U(N)$.

Существует другая конструкция универсального расслоения, имеющая более общий характер и применимая к произвольным топологическим группам. Смысл этой конструкции заключается в том, чтобы, отправляясь от простейшего главного G -расслоения, переходить к другим главным G -расслоениям, у которых все больше и больше гомотопических групп тотального пространства становятся тривиальными. Начнем с расслоения

^{*}) Это значит, что отображение $B_H \rightarrow B_G$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп.

$G \rightarrow \text{pt}$ с одноточечной базой. Тотальное пространство этого расслоения состоит из одной орбиты G . Вообще говоря, $\pi_0(G) \neq 0$, т.е. группа G имеет много компонент линейной связности. Чтобы избавиться от группы π_0 , следует присоединить к G систему путей, соединяющих каждую пару (различных) точек, и продолжить действие группы G на это новое пространство. Удобнее всего рассмотреть два экземпляра группы G и систему отрезков, соединяющих произвольную точку одного экземпляра группы G с произвольной точкой другого экземпляра группы G . Полученное пространство называется *соединением* двух экземпляров G и обозначается через $G * G$. Каждая точка соединения $G * G$ определяется набором $(\alpha_0, g_0, \alpha_1, g_1)$, $g_0, g_1 \in G$, $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. При этом считаем, что если $\alpha_0 = 0$, то при произвольном g_0 задается одна и та же точка. Аналогично, при $\alpha_1 = 0$ и произвольном g_1 задается одна и та же точка. Действие группы G на соединении $G * G$ определяется формулой

$$(\alpha_0, g_0, \alpha_1, g_1) \rightarrow (\alpha_0, hg_0, \alpha_1, hg_1), \quad h \in G. \quad (3)$$

Аналогично, соединение $k + 1$ экземпляра группы G обозначается через

$$G * G * \dots * G \quad (k + 1 \text{ раз}), \quad (4)$$

а элемент из соединения $G * G * \dots * G$ задается набором $(\alpha_0, g_0, \alpha_1, g_1, \dots, \alpha_k, g_k)$, где g_0, \dots, g_k — произвольные элементы группы G , а $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ — барицентрические координаты точки в k -мерном симплексе, т.е. $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Используя вложение симплекса меньшей размерности в симплекс большей размерности, получаем вложение соединений

$$\underbrace{G * \dots * G}_{k+1 \text{ раз}} \subset \underbrace{G * \dots * G}_{k+2 \text{ раз}},$$

при котором набору $(\alpha_0, g_0, \alpha_1, g_1, \dots, \alpha_k, g_k)$ сопоставляется набор $(\alpha_0, g_0, \alpha_1, g_1, \dots, \alpha_k, g_k, 0, h)$, где h — произвольный элемент группы G . Действие группы G на соединении (4) задается формулой, аналогичной формуле (3):

$$(\alpha_0, g_0, \dots, \alpha_k, g_k) \rightarrow (\alpha_0, hg_0, \dots, \alpha_k, hg_k), \quad h \in G.$$

Покажем, что у пространства $G * \dots * G$ ($k + 1$ раз) тривиальны гомотопические группы вплоть до размерности $k - 1$. Заметим, что соединение двух пространств $X * Y$ можно заменить на гомотопически эквивалентное ему пространство вида $S(Z)$, где $S(Z)$ — надстройка над пространством Z . В самом деле, соединение $X * Y$ является объединением $((CX) \times Y) \cup (X \times CY)$, где CX, CY — конусы с основанием X, Y . Это объединение можно преобразовать в объединение

$$X * Y = \{((CX) \times Y) \cup CY\} \cup \{(X \times (CY)) \cup CX\} = P_1 \cup P_2,$$

где

$$P_1 = (CX \times Y) \cup CY, \quad P_2 = (X \times (CY)) \cup CX.$$

Каждое из пространств P_1 и P_2 стягиваемо, а их пересечение $P_1 \cap P_2$ равно $P_3 = (X \times Y) \cup CX \cup CY$. Поэтому пространства P_1 и P_2 гомотопически эквивалентны конусу CP_3 , а их объединение — надстройке над P_3 .

Отсюда следует, что пространство $G * \dots * G$ ($k + 1$ раз) гомотопически эквивалентно k -кратной надстройке над некоторым пространством. Нетрудно проверить, что $\pi_0(G * \dots * G) = \pi_1(G * \dots * G) = 0$. Значит, по теореме Гуревича первая нетривиальная гомотопическая группа изоморфна первой

нетривиальной группе гомологий. Поскольку у k -кратной надстройки группы гомологий до размерности $k - 1$ равны нулю, то и группы гомотопий тоже равны нулю до размерности $k - 1$.

Итак, прямой предел

$$G_{\infty} = \lim_{\longrightarrow} \underbrace{(G * \dots * G)}_{k \text{ раз}}$$

является тотальным пространством универсального главного G -расслоения, поскольку $\pi_k(G_{\infty}) = 0$.

Примеры. 1. Для векторных n -мерных расслоений структурной группой может служить группа $O(n)$. Соответствующее классифицирующее пространство $BO(n)$ можно построить, используя вложение $O(n) \subset U(n)$. Повторяя же конструкцию грассмановых многообразий, приведенную в начале параграфа для группы $U(n)$, получим, что пространство $BO(n)$ гомотопически эквивалентно прямому пределу вещественных грассмановых многообразий:

$$BO(n) = \lim_{\longrightarrow} G_{N+n, n} = G_{\infty, n}.$$

2. Пусть $EU(n) \rightarrow BU(n)$ — универсальное главное $U(n)$ -расслоение. Тогда $BO(n) = EU(n)/O(n)$ и, значит, существует отображение

$$c: BO(n) \rightarrow BU(n),$$

которое является локально тривиальным расслоением со слоем $U(n)/O(n)$. Операция комплексификации векторных расслоений соответствует переходу от отображения базы X в пространство $BO(n)$ к отображению в пространство $BU(n)$ с помощью композиции с отображением c . Пусть ξ_n^R, ξ_n^C — векторные расслоения, ассоциированные с универсальными главными расслоениями над базами $BO(n)$ и $BU(n)$. Тогда можно написать следующие формальные равенства: если $f: X \rightarrow BO(n)$, $\xi = f^*(\xi_n^R)$, то

$$c\xi = cf^*(\xi_n^R) = f^*(c\xi_n^R) = f^*(c^*\xi_n^C) = (cf)^*(\xi_n^C).$$

3. С помощью отображения c из предыдущего примера можно решить, например, такую задачу: описать все вещественные векторные расслоения, комплексификация которых тривиальна. Это те расслоения, которые соответствуют отображениям, лежащим в ядре,

$$[X, BO(n)] \xrightarrow{c} [X, BU(n)], \quad (5)$$

где через $[,]$ обозначено множество классов гомотопных отображений.

Если $f: X \rightarrow BO(n)$ лежит в ядре отображения (5), то отображение cf гомотопно постоянному отображению. Поскольку отображение c является локально тривиальным расслоением, то, считая X клеточным пространством, мы можем применить аксиому о накрывающей гомотопии и заменить отображение f на гомотопное отображение в слой $U(n)/O(n)$. Таким образом, множество векторных расслоений, комплексификация которых тривиальна, изоморфно образу отображения

$$[X, U(n)/O(n)] \rightarrow [X, BO(n)].$$

Какому геометрическому объекту соответствует множество классов гомотопных отображений $[X, U(n)/O(n)]$? Это множество больше, чем его образ в множестве $[X, BO(n)]$. Нетрудно догадаться, что каждое отображение $f: X \rightarrow U(n)/O(n)$ задает не только векторное расслоение ξ , комп-

лексификация $c\xi$ которого тривиальна, но задает еще и специальную тривиализацию расслоения $c\xi$. Покажем это. Отображение $U(n) \rightarrow U(n)/O(n)$ является главным $O(n)$ -расслоением. Поэтому каждое отображение

$$f: X \rightarrow U(n)/O(n)$$

индуцирует некоторое главное $O(n)$ -расслоение над базой X , а значит, и эквивариантное отображение тотальных пространств

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{g} & U(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & U(n)/O(n) \end{array}$$

Пусть $c\xi$ — тотальное пространство главного $U(n)$ -расслоения — комплексификации расслоения ξ . Пространство ξ лежит в пространстве $c\xi$, причем вложение $\xi \subset c\xi$ эквивариантно относительно правых действий группы $O(n)$ в пространстве ξ и группы $U(n)$ в пространстве $c\xi$. Поэтому отображение $g: \xi \rightarrow U(n)$ однозначно продолжается до эквивариантного отображения $\bar{g}: c\xi \rightarrow U(n)$, что и задает тривиализацию расслоения $c\xi$. Гомотопным отображениям пространства X в пространство $U(n)/O(n)$ соответствует расслоение ξ над декартовым произведением $X \times I$ пространства X на единичный отрезок I и тривиализация расслоения $c\xi$. Поскольку ограничения расслоения ξ на сомножители $X \times \{t\}$ изоморфны, то можно считать, что гомотопным отображениям f_1 и f_2 пространства X в пространство $U(n)/O(n)$ соответствуют изоморфные расслоения ξ_1 и ξ_2 , у которых тривиализации их комплексификаций $c\xi_1$ и $c\xi_2$ гомотопны.

Обратно, пусть над базой X заданы расслоение ξ и тривиализация его комплексификации $c\xi$. Поскольку расслоение $c\xi$ тривиально, то каждая его тривиализация задается эквивариантным отображением

$$\begin{array}{ccc} c\xi & \xrightarrow{\bar{g}} & U(n) \subset EU(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & pt \subset BU(n) \end{array}$$

Тотальное пространство ξ главного $O(n)$ -расслоения лежит в тотальном пространстве $c\xi$. Поэтому ограничение

$$\bar{g} = \bar{g}|_{\xi}: \xi \rightarrow U(n) \subset EU(n)$$

является эквивариантным относительно правого действия группы $O(n)$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & c\xi & \xrightarrow{\bar{g}} & U(n) & \longrightarrow & EU(n) \\ & \nearrow & & \parallel & & \parallel \\ \xi & \xrightarrow{g} & U(n) & \longrightarrow & EU(n) & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{f} & U(n)/O(n) & \longrightarrow & BO(n) & \\ & \nearrow & & \parallel & & \parallel \\ & pt & \longrightarrow & BU(n) & & \end{array}$$

Отображение $f: X \rightarrow U(n)/O(n)$, индуцированное отображением \bar{g} , порождает расслоение ξ и тривиализацию \bar{g} расслоения $c\xi$.

Таким образом, множество классов гомотопных отображений $[X, U(n)/O(n)]$ интерпретируется как множество эквивалентных пар (ξ, φ) , где ξ — вещественное векторное расслоение над базой X , φ — изоморфизм расслоения $c\xi$ с тривиальным расслоением. Пары (ξ_1, φ_1) и (ξ_2, φ_2) считаются эквивалентными, если расслоения ξ_1 и ξ_2 изоморфны, а изоморфизмы φ_1 и φ_2 гомотопны в классе изоморфизмов.

§ 4. Характеристические классы

В предыдущих параграфах было показано, что всякое расслоение, вообще говоря, можно получить как прообраз универсального расслоения при некотором непрерывном отображении базы. Значит, в частности, векторные расслоения полностью характеризуются классами гомотопных непрерывных отображений пространства X в классифицирующее пространство $BO(n)$ (или $BU(n)$ для комплексных расслоений). Однако описывать и, в частности, различать негомотопные отображения пространства X в пространство $BO(n)$ технически сложно. Обычно исследуют некоторые инварианты векторных расслоений, которые выражаются в терминах групп гомологий и когомологий пространства X .

Говоря точнее, *характеристическим классом* α векторных расслоений называется соответствие, которое каждому n -мерному векторному расслоению ξ над базой X ставит в соответствие некоторый класс $\alpha(\xi)$ когомологий $H^*(X)$ пространства X (с фиксированной группой коэффициентов). Требуется, чтобы выполнялось следующее свойство функториальности: если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, η — n -мерное векторное расслоение над базой Y , $\xi = f^*(\eta)$ — векторное расслоение над базой X , то

$$\alpha(\xi) = f^*(\alpha(\eta)), \quad (1)$$

где в равенстве (1) под f^* понимается естественный гомоморфизм групп когомологий

$$f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X).$$

Имеется надежда, что, зная группы когомологий пространства X и значения всех характеристических классов для данного векторного расслоения ξ , можно полностью определить расслоение ξ , т.е. отличить его от других векторных расслоений над данной базой X . Хотя эта надежда в общем случае не оправдывается, но тем не менее использование характеристических классов для описания векторных расслоений является самым распространенным инструментом в топологии, приводящим во многих задачах к окончательным результатам.

Перейдем теперь к выяснению свойств характеристических классов.

Т е о р е м а 1. *Множество всех характеристических классов n -мерных векторных вещественных (комплексных) расслоений находится во взаимно однозначном соответствии с кольцом когомологий $H^*(BO(n))$ (соответственно $H^*(BU(n))$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует непосредственно из определения характеристических классов и существования универсального расслоения ξ_n над классифицирующим пространством $BO(n)$. В самом деле, если α — характеристический класс, то поставим ему в соответствие класс когомологий $\alpha(\xi_n) \in H^*(BO(n))$. Обратно, если $x \in H^*(BO(n))$ — произвольный класс когомологий, то ему соответствует характеристичес-

кий класс α , который определяется формулой: если $f: X \rightarrow \text{BO}(n)$ — такое непрерывное отображение, что $\xi = f^*(\xi_n)$, то

$$\alpha(\xi) = f^*(x) \in H^*(X). \quad (2)$$

Очевидно, соответствие $\xi \rightarrow \alpha(\xi)$, задаваемое формулой (2), является характеристическим классом, поскольку, если $g: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, $\xi = g^*(\eta)$, $\eta = h^*(\xi_n)$, $h: Y \rightarrow \text{BO}(n)$ — непрерывное отображение, то

$$\alpha(\xi) = \alpha((hg)^*(\xi_n)) = (hg)^*(x) = g^*(h^*(x)) = g^*(\alpha(h^*(\xi_n))) = g^*(\alpha(\eta)).$$

Если $f: \text{BO}(n) \rightarrow \text{BO}(n)$ — тождественное отображение, то $\alpha(\xi_n) = f^*(x) = x$. Значит, характеристическому классу α соответствует класс когомологий x . Теорема 1 доказана.

Характеристические классы определены на множестве n -мерных векторных расслоений с фиксированной размерностью n . Чтобы задать характеристический класс на множестве всех векторных расслоений сразу, необходимо, очевидно, задать последовательность характеристических классов $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$, каждый из которых принимает значение на расслоениях своей размерности n . Такая последовательность тоже будет называться характеристическим классом.

О п р е д е л е н и е. Характеристический класс $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$ называется *стабильным*, если выполнено условие \blacktriangle

$$\alpha_{n+1}(\xi \oplus 1) = \alpha_n(\xi), \quad \dim \xi = n, \quad (3)$$

для любого n -мерного векторного расслоения ξ .

Согласно теореме 1 можно считать, что $\alpha_n \in H^*(\text{BO}(n))$. Пусть $\varphi: \text{BO}(n) \rightarrow \text{BO}(n+1)$ — непрерывное отображение, для которого $\varphi^*(\xi_{n+1}) = \xi_n \oplus 1$. Отображение φ соответствует стандартному вложению группы $O(n) \subset O(n+1)$. Тогда условие (3) эквивалентно равенству

$$\varphi^*(\alpha_{n+1}) = \alpha_n. \quad (4)$$

Рассмотрим последовательность отображений

$$\text{BO}(1) \rightarrow \text{BO}(2) \rightarrow \dots \rightarrow \text{BO}(n) \rightarrow \text{BO}(n+1) \rightarrow \dots$$

и прямой предел

$$\text{BO} = \varinjlim \text{BO}(n). \quad (5)$$

Положим

$$H^*(\text{BO}) = \varprojlim H^*(\text{BO}(n)). \quad (6)$$

Тогда условие (4) означает, что множество стабильных характеристических классов находится во взаимно однозначном соответствии с кольцом когомологий $H^*(\text{BO})$ пространства BO . Рассмотрим теперь случай целочисленных когомологий.

Т е о р е м а 2. Кольцо целочисленных когомологий $H^*(\text{BU}(n); \mathbb{Z})$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами $\mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n]$, где $c_k \in H^{2k}(\text{BU}(n); \mathbb{Z})$. Образующие c_1, c_2, \dots, c_n можно выбрать таким образом, чтобы

а) при естественном отображении $\varphi: \text{BU}(n) \rightarrow \text{BU}(n+1)$ выполнялись соотношения

$$\varphi^*(c_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \varphi^*(c_{k+1}) = 0; \quad (7)$$

б) для прямой суммы расслоений выполнялись соотношения

$$c_k(\xi \oplus \eta) = c_k(\xi) + c_{k-1}(\xi)c_1(\eta) + c_{k-2}(\xi)c_2(\eta) + \dots + c_1(\xi)c_{k-1}(\eta) + c_k(\eta) = \sum_{\alpha+\beta=k} c_\alpha(\xi)c_\beta(\eta), \quad (8)$$

где $c_0(\xi) = 1$.

Условие (7) означает, что последовательность $\{0, \dots, 0, c_k, c_k, \dots, c_k, \dots\}$ образует стабильный характеристический класс, обозначаемый снова через c_k . Это обозначение употреблено в формуле (8). Если $\dim \xi < k$, то $c_k(\xi) = 0$ согласно формуле (7). Формулу (8) можно записать более простым способом. Положим

$$c = 1 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_k + \dots \quad (9)$$

Значение формального ряда (9) имеет смысл для любого векторного расслоения ξ , поскольку отлично от нуля только конечное число слагаемых:

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_k(\xi), \quad \dim \xi = k. \quad (10)$$

Поэтому из формулы (8) следует, что

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta). \quad (11)$$

Обратно, чтобы получить соотношения (8) из формулы (11), следует приравнять в левой и правой частях формулы (11) однородные компоненты одинаковой размерности.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Основой вычисления коомологий пространств $BU(n)$ является метод спектральных последовательностей для расслоений.

Прежде всего заметим, что с помощью спектральных последовательностей удастся полностью вычислить коомологии унитарных групп $U(n)$. В самом деле, поскольку $H^0(S^n) = \mathbb{Z}$, $H^n(S^n) = \mathbb{Z}$, $H^k(S^n) = 0$ при $k \neq 0$, $k \neq n$, то кольцо коомологий $H^*(S^n) = \bigoplus_k H^k(S^n) = H^0(S^n) \oplus H^n(S^n)$

является свободной внешней алгеброй над кольцом целых чисел \mathbb{Z} с одной образующей $a_n \in H^n(S^n)$. Выбор образующей a_n неоднозначен: вместо элемента a_n можно взять элемент $(-a_n)$. Мы будем записывать кольцо коомологий сферы S^n следующим образом: $H^*(S^n) = \Lambda(a_n)$.

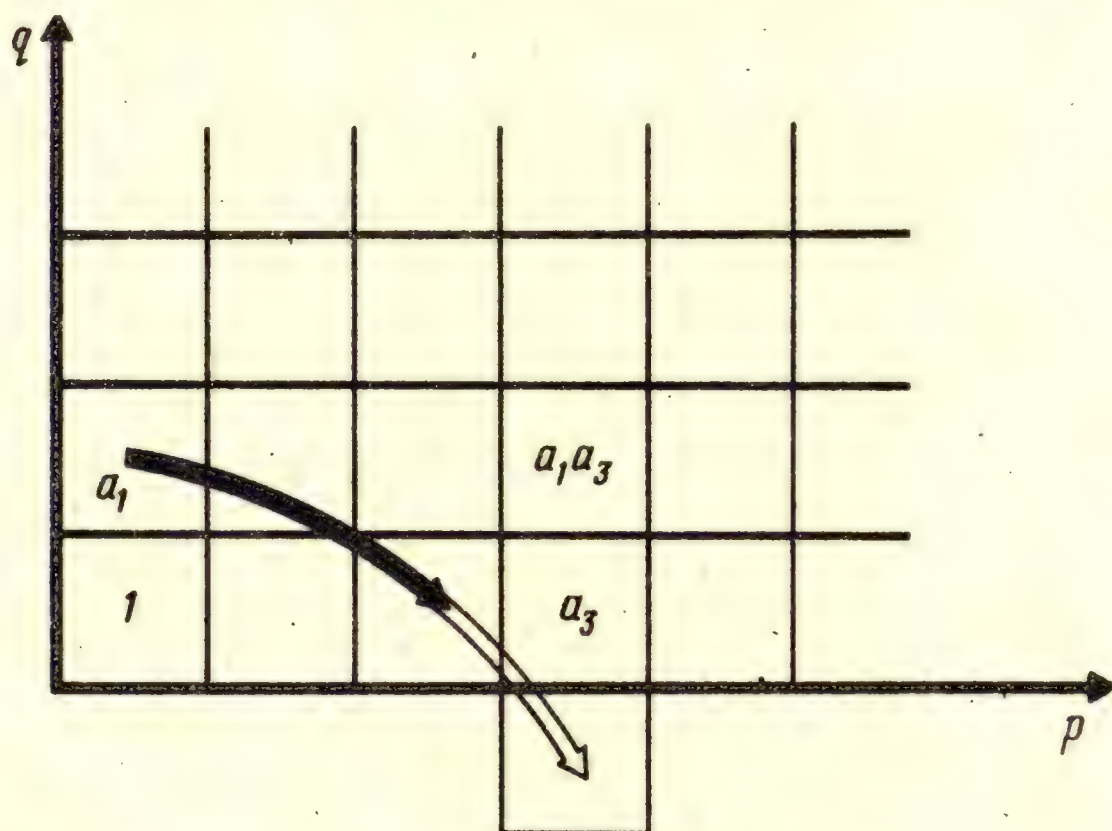


Рис. 3.

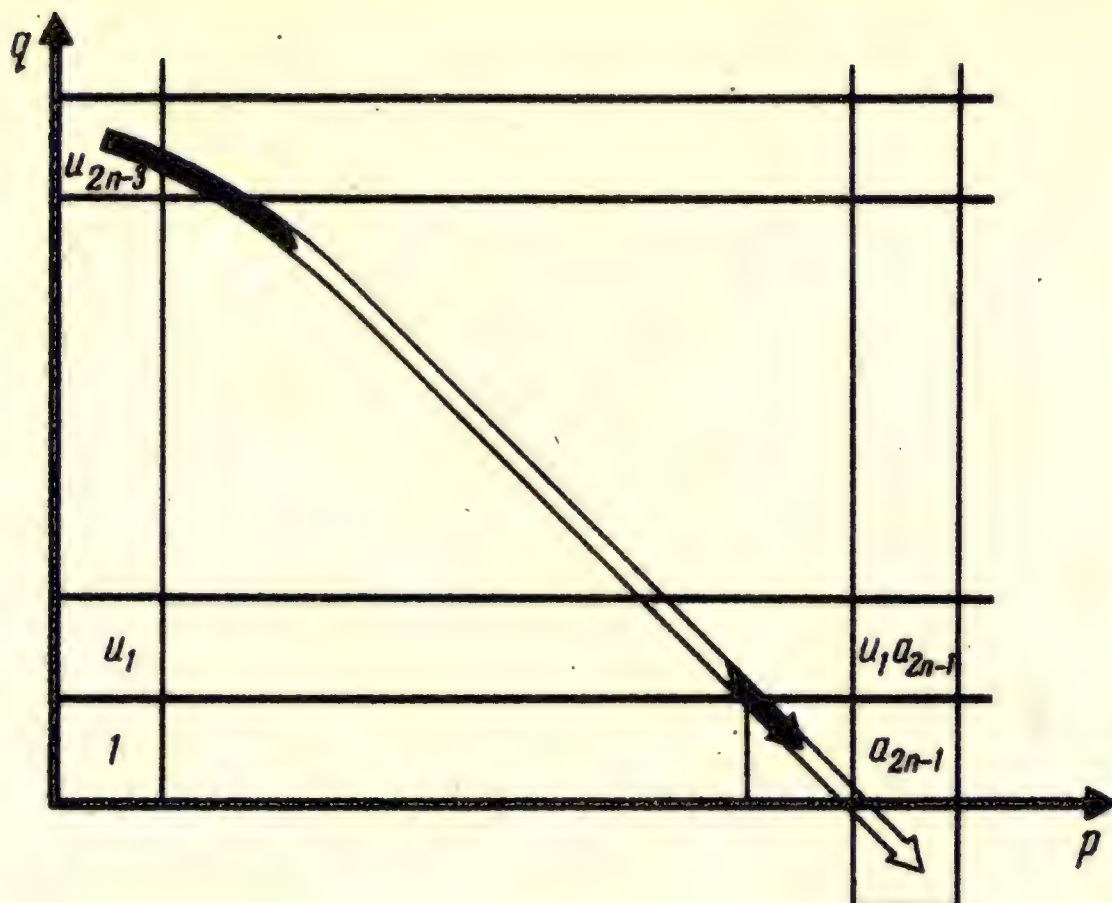


Рис. 4.

Далее, рассмотрим расслоение $U(2) \rightarrow S^3$ со слоем S^1 . Второй член спектральной последовательности этого расслоения имеет вид

$$\begin{aligned} E_2^{**} &= \bigoplus_{p,q} E_2^{p,q} = H^*(S^3, H^*(S^1)) = \\ &= H^*(S^3) \otimes H^*(S^1) = \Lambda(a_3) \otimes \Lambda(a_1) = \Lambda(a_1, a_3). \end{aligned}$$

Нетривиальным дифференциал d_2 может быть только на образующей $1 \otimes a_1 \in E_2^{0,1} = H^0(S^3, H^1(S^1))$, причем $d_2(1 \otimes a_1) \in E_2^{2,0} = H^2(S^3, H^0(S^1)) = 0$. Таким образом, $d_2(1 \otimes a_1) = 0$, $d_2(a_3 \otimes 1) = 0$, $d_2(a_3 \otimes a_1) = d_2(a_3 \otimes 1)a_1 \pm a_3 d_2(1 \otimes a_1) = 0$. Значит, дифференциал d_2 тождественно равен нулю, поэтому $E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$. По тем же причинам $d_3 = 0$ и $E_4^{p,q} = E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$. Продолжая так и далее, получаем $d_n = 0$,

$$E_{n+1}^{**} = E_n^{**} = \dots = E_2^{**} = \Lambda(a_1, a_3), \quad E_\infty^{**} = \Lambda(a_1, a_3).$$

Кольцо когомологий $H^*(U(2))$ присоединено к кольцу $\Lambda(a_1, a_3)$ т.е. в кольце $H^*(U(2))$ имеется фильтрация, последовательные факторгруппы которой изоморфны однородным слагаемым кольца $\Lambda(a_1, a_3)$. В каждой размерности $n = p + q$ группы $E_\infty^{p,q}$ отличны от нуля только для одного значения p, q . Следовательно, $H^0(U(2)) = \mathbb{Z}$, $H^1(U(2)) = E_\infty^{1,0}$, $H^3(U(2)) = E_\infty^{0,3}$, $H^4(U(2)) = E_\infty^{1,3}$. Пусть $u_1 \in H^1(U(2))$, $u_3 \in H^3(U(2))$ — образующие, которые изоморфны соответственно элементам a_1 и a_3 . Поскольку элемент $a_1 a_3$ является образующим элементом в группе $E_\infty^{1,3}$, то и $u_1 u_3$ — образующий элемент группы $H^4(U(2))$.

Наши рассуждения удобно иллюстрировать таблицей (рис. 3), в которой в каждой клетке обозначены образующие нетривиальных групп $E_s^{p,q}$ для фиксированного s -го члена спектральной последовательности.

Для краткости в обозначениях образующих опущен знак тензорного умножения \otimes . Стрелкой обозначено действие дифференциала d_s при $s = 2, 3$. В пустых клетках стоят нулевые группы.

Таким образом, $H^*(U(2)) = \Lambda(u_1, u_3)$.

Допустим теперь, что $H^*(U(n-1)) = \Lambda(u_1, u_3, \dots, u_{2n-3})$, $u_{2k-1} \in H^{2k-1}(U(n-1))$, $1 \leq k \leq n-1$. Рассмотрим расслоение $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ со слоем $U(n-1)$. Член E_2 спектральной последовательности имеет вид $E_2^{**} = H^*(S^{2n-1}; H^*(U(n-1))) = \Lambda(a_{2n-1}) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_{2n-3}) = \Lambda(u_1, u_3, \dots, u_{2n-3}, a_{2n-1})$ (рис. 4). Первый нетривиальный дифференциал может быть только d_{2n-1} , но поскольку $d_{2n-1}(u_k) = 0$, $k = 1, 3, \dots, 2n-3$, а любой элемент $x \in E^{0,q}$ разлагается в произведение элементов u_k , то $d_{2n-1}(x) = 0$. По аналогичным причинам все последующие дифференциалы d_s тоже равны нулю. Значит,

$$E_\infty^{p,q} = \dots = E_s^{p,q} = \dots = E_2^{p,q} = H^p(S^{2n-1}, H^q(U(n-1))),$$

$$E_\infty^{**} = \Lambda(u_1, u_3, \dots, u_{2n-3}, u_{2n-1}).$$

Покажем, что и кольцо $H^*(U(n))$, к которому присоединено кольцо E_∞^{**} , тоже изоморфно внешней алгебре $\Lambda(u_1, u_3, \dots, u_{2n-3}, u_{2n-1})$. Действительно, поскольку группа E_∞^{**} не имеет кручения, существуют элементы $v_1, v_3, \dots, v_{2n-3} \in H^*(U(n))$, переходящие в $u_1, u_3, \dots, u_{2n-3}$ при вложении $U(n-1) \subset U(n)$. Поскольку элементы $v_1, v_3, \dots, v_{2n-3}$ нечетномерны, произведения $v_1^{\epsilon_1} v_3^{\epsilon_3} \dots v_{2n-3}^{\epsilon_{2n-3}}$ могут быть ненулевыми только при $\epsilon_k = 0, 1$. Все эти элементы порождают подгруппу в группе $H^*(U(n))$, которая изоморфно отображается на группу $H^*(U(n-1))$. Элемент $a_{2n-1} \in E_\infty^{2n-1,0}$ имеет фильтрацию $2n-1$. Значит, элементы вида $v_1^{\epsilon_1} v_3^{\epsilon_3} \dots v_{2n-3}^{\epsilon_{2n-3}} a_{2n-1} \in E_\infty^{2n-1,0}$, $\epsilon_k = 0, 1$, порождают свободную группу $E_\infty^{2n-1,0}$ и образуют в ней базис. Следовательно, вся группа $H^*(U(n))$ порождается базисом элементов $v_1^{\epsilon_1} v_3^{\epsilon_3} \dots v_{2n-3}^{\epsilon_{2n-3}} a_{2n-1}^{\epsilon_{2n-1}}$, $\epsilon_k = 0, 1$, т.е. $H^*(U(n)) = \Lambda(v_1, v_3, \dots, v_{2n-3}, a_{2n-1})$.

Рассмотрим теперь расслоение $EU(1) \rightarrow BU(1)$ со слоем $U(1) = S^1$. Из точной гомотопической последовательности

$$\pi_1(EU(1)) \rightarrow \pi_1(BU(1)) \rightarrow \pi_0(S^1)$$

следует, что $\pi_1(BU(1)) = 0$. Нам неизвестны кохомологии базы, но известны кохомологии слоя $H^*(S^1) = \Lambda(u_1)$ и кохомологии тотального пространства $H^*(EU(1)) = 0$. Это значит, что у спектральной последовательности данного расслоения $E_2^{p,q} = 0$, $\bigcap_s E_s^{p,q} = 0$.

Поскольку $E_2^{p,q} = H^p(BU(1), H^q(S^1))$, то $E_2^{p,q} = 0$ при $q \geq 2$, т.е. на таблице (рис. 5) отличными от нуля будут группы только в двух строках при $q = 0$ и $q = 1$. Более того $E_2^{p,1} \approx E_2^{p,0} \otimes u_1 \approx E_2^{p,0}$. Поскольку $E_2^{p,q} = 0$ при $q \geq 2$, то и $E_s^{p,q} = 0$ при $q \geq 2$. Значит, дифференциалы d_3, d_4, \dots все равны нулю, т.е. $E_\infty^{p,q} = \dots = E_n^{p,q} = \dots = E_3^{p,q} = 0$. Поскольку $E_3^{p,q} =$

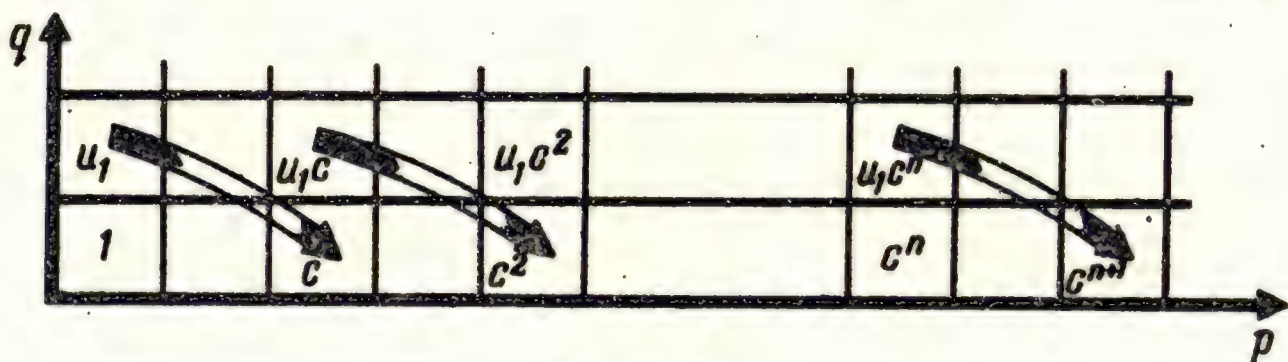


Рис. 5.

$= H(E_2^{p,q}, d_2) = 0$, то дифференциал $d_2: E_2^{p,1} \rightarrow E_2^{p+2,0}$ является изоморфизмом. Обозначим $c = d_2(u_1)$. Тогда получим $H^1(BU(1)) = 0$, $H^2(BU(1)) = \mathbb{Z}$ с образующей c , $E_2^{2,1} = \mathbb{Z} \ni cu_1$, $d_2(cu_1) = c^2$, $H^3(BU(1)) = 0$, $H^4(BU(1)) = \mathbb{Z}$ с образующей $d_2(cu_1) = c^2$ и т.д., $H^{2k-1}(BU(1)) = 0$, $H^{2k}(BU(1)) = \mathbb{Z}$ с образующей c^k .

Таким образом, кольцо когомологий $BU(1)$ изоморфно кольцу многочленов с одной двумерной образующей c : $H^*(BU(1)) = \mathbb{Z}[c]$.

Допустим, что $H^*(BU(n-1)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{n-1}]$. Рассмотрим расслоение $BU(n-1) \rightarrow BU(n)$ со слоем $U(n)/U(n-1) = S^{2n-1}$. Из точной гомотопической последовательности устанавливаем, что $\pi_1(BU(n)) = 0$. На этот раз известны когомологии слоя S^{2n-1} и тотального пространства $BU(n-1)$, когомологии последнего уже нетривиальны и равны кольцу $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{n-1}]$. Поэтому в спектральной последовательности отличными от нуля могут быть только члены $E_s^{p,0}$ и $E_s^{p,2n-1}$, причем $E_2^{p,2n-1} = E_2^{p,0} \otimes a_{2n-1} = H^p(BU(n)) \otimes a_{2n-1}$ (рис. 6). Поэтому единственным нетривиальным дифференциалом может быть только d_{2n} . Значит, $E_2^{p,q} = \dots = E_{2n}^{p,q}$,

$$H(E_{2n}^{p,q}, d_{2n}) = E_{2n+1}^{p,q} = \dots = E_{\infty}^{p,q}.$$

Очевидно, если $n = p + q$ — нечетное число, то $E_{\infty}^{p,q} = 0$. Поэтому $d_{2n}: E_{2n}^{0,2n-1} \rightarrow E_{2n}^{2n,0}$ является мономорфизмом. Далее, при $p + q = k < 2n - 1$ имеет место равенство $E_2^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$. Значит, группы $E_{2n}^{k,0}$ тривиальны при нечетном $k \leq 2n - 1$. Следовательно, дифференциал $d_{2n}: E_{2n}^{k,2n-1} \rightarrow E_{2n}^{k+2n,0}$ является мономорфизмом при $k \leq 2n$. Этот дифференциал произведет изменения в члене $E_{2n+1}^{k+2n,0}$ только при четных значениях $k \leq 2n$. Значит, при нечетных $k \leq 2n$ получаем $E_{2n}^{k+2n,0} = 0$. Поэтому дифференциал $d_{2n}: E_{2n}^{k,2n-1} \rightarrow E_{2n}^{k+2n,0}$ является мономорфизмом при $k \leq 4n$. По индукции можно показать, что $E_{2n}^{k,0} = 0$ при любом нечетном k , а дифференциал $d_{2n}: E_{2n}^{k,2n-1} \rightarrow E_{2n}^{k+2n,0}$ является мономорфизмом. Следовательно, $E_{2n+1}^{k,2n-1} = 0$, $E_{2n+1}^{k+2n,0} = E_{2n}^{k+2n,0} / E_{2n}^{k,2n-1} = E_{\infty}^{k+2n,0}$. Поскольку кольцо $H^*(BU(n-1))$ не имеет кручения, а в члене $E_{\infty}^{p,q}$ только одна строка отлична от нуля ($q = 0$), то и группы $E_{\infty}^{k+2n,0}$ не имеют кручения, т.е. образ дифференциала d_{2n} является прямым слагаемым.

Пусть $c_n = d_{2n}(a_{2n-1})$. Тогда $d_{2n}(x a_{2n-1}) = x c_n$. Таким образом, отображение

$$H^*(BU(n)) \rightarrow H^*(BU(n)),$$

задаваемое формулой $x \rightarrow c_n x$, является мономорфизмом на прямое слагаемое, а факторкольцо изоморфно кольцу $H^*(BU(n-1)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{n-1}]$.

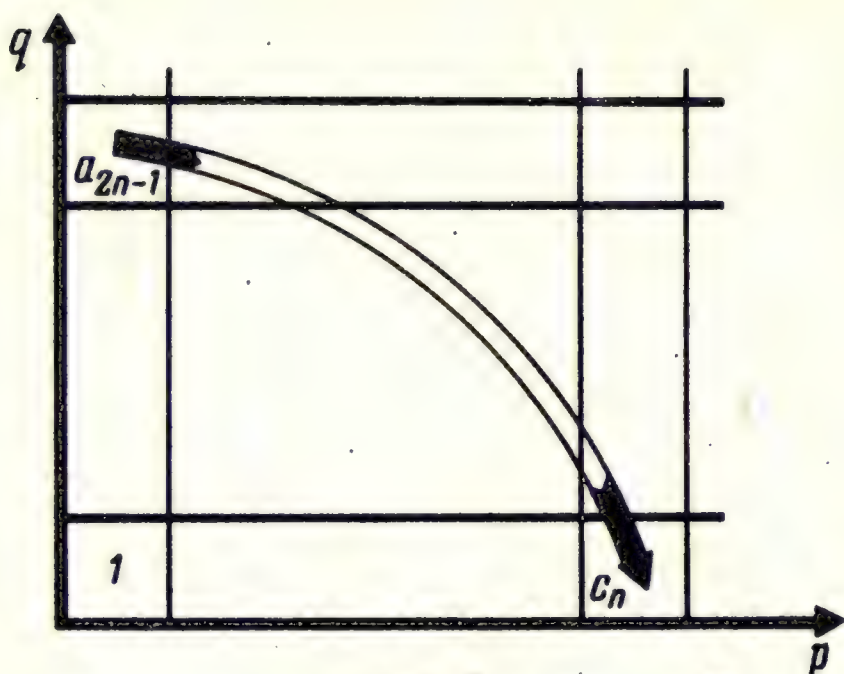


Рис. 6.

Значит,

$$H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{n-1}, c_n].$$

Рассмотрим теперь подгруппу $T^n = U(1) \times \dots \times U(1)$ (n раз) как подгруппу унитарной группы $U(n)$, состоящую из диагональных матриц. Тогда вложение $T^n \subset U(n)$ индуцирует отображение классифицирующих пространств

$$j_n: BT^n \rightarrow BU(n).$$

Поскольку $T^n = U(1) \times \dots \times U(1)$, то $BT^n = BU(1) \times \dots \times BU(1)$, а значит, $H^*(BT^n) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]$, где $t_k \in H^2(BU(1))$ — образующая k -го сомножителя в BT^n . Выясним, как устроено отображение когомологий

$$j_n^*: \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \rightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n].$$

Л е м м а. Гомоморфизм

$$j_n^*: \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \rightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n],$$

индуцированный естественным отображением

$$j_n: BT^n \rightarrow BU(n),$$

является мономорфизмом на прямое слагаемое, состоящее из всех симметрических многочленов от переменных t_1, \dots, t_n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha: U(n) \rightarrow U(n)$ — внутренний автоморфизм группы, заключающийся в перестановке базисных векторов векторного пространства, в котором матрицы из $U(n)$ действуют как операторы. Автоморфизм α переводит диагональные матрицы в диагональные, переставляя элементы матриц. Другими словами, автоморфизм α отображает подгруппу T^n в себя, переставляя сомножители пространства $T^n = U(1) \times \dots \times U(1)$.

Аutomорфизм α индуцирует гомеоморфизм пространств BT^n и $BU(n)$, причем у пространства $BT^n = BU(1) \times \dots \times BU(1)$ он переставляет сомножители, при этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BT^n & \xrightarrow{j_n} & BU(n) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ BT^n & \xrightarrow{j_n} & BU(n) \end{array} \quad (12)$$

коммутативна. Внутренний автоморфизм $\alpha: U(n) \rightarrow U(n)$ гомотопен тождественному автоморфизму в классе внутренних автоморфизмов, поскольку группа $U(n)$ связна. Поэтому отображение $\alpha: BU(n) \rightarrow BU(n)$ гомотопно тождественному отображению. Таким образом, переходя в диаграмме (12) к гомоморфизмам в когомологиях, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(BT^n) & \xleftarrow{j_n^*} & H^*(BU(n)) \\ \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* \\ H^*(BT^n) & \xleftarrow{j_n^*} & H^*(BU(n)) \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] & \xleftarrow{j_n^*} & \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \\ \downarrow \alpha^* & & \downarrow \alpha^* \\ \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] & \xleftarrow{j_n^*} & \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n] \end{array} \quad (13)$$

Правый гомоморфизм α^* тождествен, а левый переставляет переменные t_1, \dots, t_n . Поэтому образ j_n^* состоит из симметрических многочленов от переменных t_1, \dots, t_n .

Теперь покажем, что гомоморфизм $j_n^*: H^*(BU(n)) \rightarrow H^*(BT^n)$ является мономорфизмом на прямое слагаемое. Вложение $T^n \subset U(n)$ можно представлять как композицию вложений

$$\begin{aligned} T^n &= \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n \text{ раз}} \subset U(2) \times \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n-2 \text{ раза}} \subset \\ &\subset U(3) \times \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n-3 \text{ раза}} \subset \dots \subset U(n-1) \times U(1) \subset U(n). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно проверить, что влияние $U(k) \times U(1) \subset U(k+1)$ индуцирует в когомологиях мономорфизм на прямое слагаемое

$$H^*(BU(k+1)) \rightarrow H^*(BU(k) \times BU(1)).$$

Рассмотрим расслоение $B(U(k) \times U(1)) \rightarrow BU(k+1)$ со слоем $U(k+1)/(U(k) \times U(1)) = CP^k$. Член E_2 спектральной последовательности этого расслоения имеет следующий вид:

$$E_2^{*,*} = H^*(BU(k+1), H^*(CP^k)).$$

Нам важно отметить, что члены $E_2^{p,q}$ отличны от нуля только при четных p и q . Следовательно, дифференциал d_2 , а затем и дифференциалы d_3, d_4, \dots тривиальны, т.е. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Все группы $E_\infty^{p,q}$ не имеют кручения. Значит, группа

$$E_\infty^{p,0} = H^p(BU(k+1); \mathbb{Z}) \subset H^*(BU(k) \times BU(1); \mathbb{Z})$$

является прямым слагаемым.

Итак, гомоморфизм $j_n^*: H^k(BU(n)) \rightarrow H^k(BU(1) \times \dots \times BU(1))$ является мономорфизмом на прямое слагаемое, лежащее в подгруппе симметрических многочленов степени k от переменных t_1, t_2, \dots, t_n . Очевидно, что ранги группы $H^k(BU(n))$ и подгруппы симметрических многочленов степени k от переменных t_1, t_2, \dots, t_n равны. Это значит, что образ j_n^* совпадает с подгруппой всех симметрических многочленов. Лемма доказана.

Используя лемму, выберем образующие $c_1, \dots, c_n \in H^*(BU(n))$ как прообразы при гомоморфизме j_n^* элементарных симметрических многочленов от образующих $t_1, \dots, t_n \in H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1))$. Тогда условие (7) следует из того, что при гомоморфизме j_{n+1}^* в элемент c_{n+1} переходит произведение t_1, \dots, t_{n+1} , а при вложении

$$\underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{n \text{ раз}} \subset \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{n+1 \text{ раз}},$$

элемент t_{n+1} отображается в нулевой класс когомологий.

Условие (8) непосредственно следует из свойств элементарных симметрических многочленов:

$$\begin{aligned} \sigma_k(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) &= \\ &= \sum_{\alpha+\beta=k} \sigma_\alpha(t_1, \dots, t_n) \sigma_\beta(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}). \end{aligned}$$

Тем самым мы полностью завершили доказательство теоремы 2.

Образующие c_1, c_2, \dots, c_n , введенные в теореме 2, определяются не однозначно, а с точностью до выбора знака у образующих $t_1, \dots, t_n \in H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1))$. При этом элементы c_{2k} определяются уже од-

нозначно, поскольку перемена знака у элементов t_k не меняет класс c_{2k} . Выбор же знака у элемента c_{2k+1} обычно определяется тем, какой класс выбирается в качестве характеристического класса расслоения Хопфа над $CP^1 = S^2$. Поскольку структура комплексного многообразия на CP^1 задает и расслоение Хопфа, и ориентацию многообразия CP^1 , то полагают, что c_1 от расслоения Хопфа равен классу когомологий из $H^2(CP^1)$, который на фундаментальном цикле принимает значение 1.

Характеристические классы c_k называются *характеристическими классами Чженя* *). Если X — комплексное аналитическое многообразие, TX — его касательное расслоение, снабженное структурой комплексного векторного расслоения, то характеристические классы расслоения TX называют просто *характеристическими классами многообразия* и пишут $c_k(X) = c_k(TX)$.

Пример 1. Рассмотрим комплексное проективное пространство CP^n . Как было показано в § 6 главы 1, касательное расслоение TCP^n удовлетворяет соотношению

$$TCP^n \oplus \bar{1} = (n+1) \xi^*,$$

где ξ — расслоение Хопфа. Имеем

$$\begin{aligned} c_k(TCP^n) &= c_k(TCP^n \oplus 1) = c_k((n+1) \xi^*) = \\ &= \sigma_k(-t_1, -t_2, \dots, t_n) |_{t_k=t} = (-1)^k \binom{n+1}{k} t^k, \end{aligned}$$

где $t \in H^2(CP^n)$ — образующий элемент. Поскольку характеристические классы касательного расслоения нетривиальны, то и само касательное расслоение тоже нетривиально.

Мы подробно описали алгебраическую структуру характеристических классов комплексных расслоений. Доказательство свойств характеристических классов основано на некоторых простых геометрических свойствах унитарной группы $U(n)$ и общих алгебраических свойствах групп когомологий.

Аналогичные свойства характеристических классов вещественных расслоений тоже выводятся из геометрии ортогональной группы $O(n)$ и алгебраических свойств спектральных последовательностей. Поскольку в дальнейшем мы будем мало использовать характеристические классы вещественных расслоений, то ниже мы опустим некоторые технически громоздкие моменты при описании вещественных характеристических классов и по этим вопросам отошлем к другим пособиям (Милнор и Стасеф [1], Хьюз и Моллер [1]).

Описать характеристические классы вещественных векторных расслоений — это согласно теореме 1 описать кольцо когомологий $H^*(BO(n))$. Однако, в отличие от кольца $H^*(BU(n))$, кольцо $H^*(BO(n))$ имеет элементы конечного порядка (а именно, только элементы второго порядка). Поэтому удобно отдельно описать кольцо когомологий $H^*(BO(n); \mathbb{Q})$ с коэффициентами в поле рациональных чисел и отдельно кольцо $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$ с коэффициентами в поле вычетов по модулю 2.

Теорема 3.1. Кольцо $H^*(BSO(2n); \mathbb{Q})$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda]$, где

$$p_k \in H^{4k}(BSO(2n); \mathbb{Q}), \quad \chi \in H^{2n}(BSO(2n); \mathbb{Q}).$$

*) См. сноску на с. 81. — Прим. ред.

2. Кольцо $H^*(BSO(2n+1); \mathbb{Q})$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_n]$, где $p_k \in H^{4k}(BSO(2n); \mathbb{Q})$.

3. Образующие $\{p_k\}$ можно выбрать таким образом, что гомоморфизм, индуцированный стандартным отображением $BSO(2n) \rightarrow BSO(2n+1)$, переводит p_k в p_k , $1 \leq k \leq n-1$, а p_n в χ^2 . Стандартное отображение $BSO(2n+1) \rightarrow BSO(2n+2)$ индуцирует гомоморфизм в когомологиях, при котором $p_k \rightarrow p_k$, $1 \leq k \leq n$, $\chi \rightarrow 0$.

4. Для суммы двух расслоений имеет место соотношение

$$p_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{\alpha+\beta=k} p_\alpha(\xi) p_\beta(\eta),$$

где $p_0 = 1$.

Доказательство. Группа $SO(2)$ изоморфна окружности $S^1 = U(1)$, поэтому кольцо когомологий $BSO(2)$ нам известно:

$$H^*(BSO(2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\chi], \quad \chi \in H^2(BSO(2); \mathbb{Q}).$$

Рассмотрим расслоение

$$BSO(2k-2) \rightarrow BSO(2k) \quad (14)$$

со слоем $SO(2k)/SO(2k-2) = V_{2k,2}$. Многообразие Штифеля $V_{2k,2}$ служит тотальным пространством расслоения

$$V_{2k,2} \rightarrow S^{2k-1} \quad (15)$$

со слоем S^{2k-2} . Точки многообразия Штифеля $V_{2k,2}$ можно представить как пары ортогональных единичных векторов (e_1, e_2) , первый из которых пробегает сферу S^{2k-1} , а второй касается сферы S^{2k-1} в точке e_1 . Поскольку сфера S^{2k-1} нечетномерна, то существует векторное поле, ненулевое в каждой точке $*$), т.е. существует сечение расслоения (15). Отсюда следует, что гомоморфизм

$$H^*(S^{2k-1}) \rightarrow H^*(V_{2k,2})$$

является мономорфизмом. В спектральной последовательности для расслоения (15) единственный дифференциал d_{2k} тривиален. Следовательно, $E_2^{**} = E_\infty^{**} = H^*(V_{2k,2}) = \Lambda(a_{2k-1}, a_{2k-2})$.

Рассмотрим спектральную последовательность для расслоения (14) (рис. 7). Предполагаем по индукции, что

$$H^*(BSO(2k-2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-2}, \chi],$$

где $\chi \in H^{2k-2}(BSO(2k-2); \mathbb{Q})$. Это, в частности, означает, что нечетномерные когомологии пространства $BSO(2k-2)$ тривиальны. Если $d_{2k-1}(a_{2k-2}) = v \neq 0$, то $d_{2k-1}(a_{2k-2}v) = v^2 = 0$ и, значит, $E_\infty^{2k-1, 2k-2} \neq 0$, а это противоречит предположению о том, что $H^{4k-3}(BSO(2k-2); \mathbb{Q}) = 0$. Поэтому

*) Ненулевое поле на нечетномерной сфере S^{2k-1} можно построить следующим образом. Пусть $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$ — единичная сфера в k -мерном комплексном пространстве. Скалярное произведение пары векторов $z = (z^1, \dots, z^n)$ и $w = (w^1, \dots, w^n)$ задается формулой

$$(z, w) = \operatorname{Re}(\sum z^k \bar{w}^k).$$

Следовательно,

$$(z, iz) = \operatorname{Re}(\sum z^k (-i\bar{z}^k)) = \operatorname{Re}((-i) \sum z^k \bar{z}^k) = 0.$$

Итак, каждой точке $z \in S^{2n-1}$ можно сопоставить ненулевой касательный вектор iz , что и задает ненулевое векторное поле.

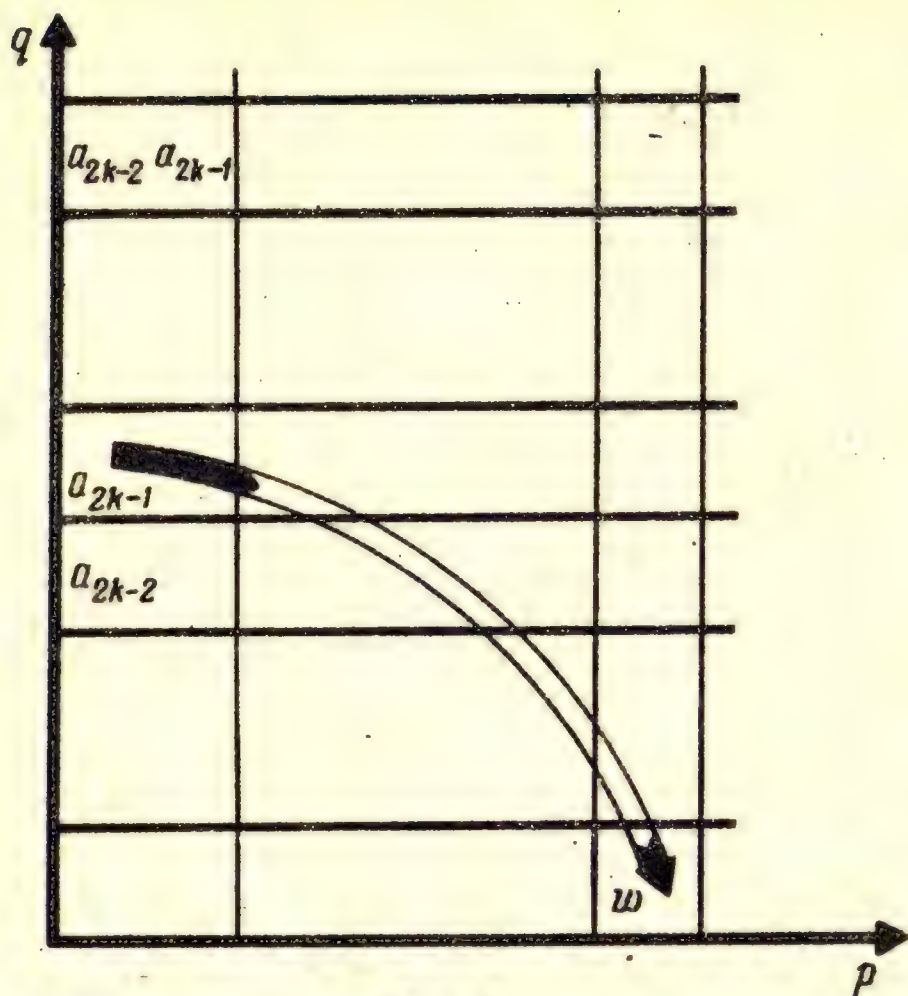


Рис. 7.

$d_{2k-1}(a_{2k-2}) = 0$. Следовательно, $d_{2k-1} \equiv 0$. Далее, поскольку элемент a_{2k-1} имеет нечетную размерность, то $d_{2k}(a_{2k-1}) = w \neq 0$. Так же, как и в доказательстве теоремы 2, устанавливаем, что кольцо $H^*(BSO(2k); \mathbb{Q})$ имеет только четномерные элементы и дифференциал d_{2k} мономорфно отображает подгруппу $a_{2k-1}E_{2k}^{*,*}$ на подгруппу $wE_{2k}^{*,*}$. Поэтому член $E_{\infty}^{*,*}$ имеет вид $E_{\infty}^{*,0} \oplus a_{2k-2}E_{\infty}^{*,0}$, который присоединен к кольцу многочленов $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-2}, \chi]$. Это значит, что $p_1, \dots, p_{k-2} \in E_{\infty}^{*,0}$, $[\chi] = a_{2k-2}$, $[\chi^2] \in E_{\infty}^{*,0}$, $E_{\infty}^{*,0} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_{k-2}, \chi^2]$, $E_2^{*,0} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_{k-2}, \chi^2, w]$.

Положим $p_{k-1} = \chi^2$, тогда

$$E_{\infty}^{*,0} = H^*(BSO(2k); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-1}, w].$$

Рассмотрим расслоение

$$BSO(2k-2) \rightarrow BSO(2k-1) \quad (16)$$

со слоем S^{2k-2} . В спектральной последовательности расслоения (16) член $E_2^{*,*}$ имеет всего две ненулевые строки: $E_2^{*,0}$ и $E_2^{*,2k-2} = a_{2k-2}E_2^{*,0}$. Если $d_{2k-1}(a_{2k-2}) = v \neq 0$, то $d_{2k-1}(a_{2k-2}v) = v^2 = 0$, т.е. член $E_{\infty}^{2k-1,2k-2} \neq 0$. Это противоречит предыдущим вычислениям, поскольку нечетномерные когомологии пространства $BSO(2k-2)$ равны нулю. Значит, $d_{2k-1}(a_{2k-2}) = 0$, $d_{2k-1} \equiv 0$, $E_2^{*,*} = E_{\infty}^{*,*}$. Следовательно, нечетномерные когомологии пространства $BSO(2k-1)$ равны нулю.

Рассмотрим расслоение

$$BSO(2k-1) \rightarrow BSO(2k) \quad (17)$$

со слоем S^{2k-1} . Член $E_2^{*,*}$ спектральной последовательности расслоения (17) имеет вид

$$E_2^{*,*} = H^*(BSO(2k)) \otimes \Lambda(a_{2k-1}).$$

Поскольку нечетномерные когомологии тотального пространства $BSO(2k-1)$ тривиальны, то $d_{2k}(a_{2k-1}) = v \neq 0$. Используя вычисления для расслоения (14), нетрудно убедиться, что элемент $v = d_{2k}(a_{2k-1}) = w$. Значит, $d_{2k}(a_{2k-1}x) = wx$. Следовательно,

$$E_{2k+1}^{*,*} = E_{\infty}^{*,*} = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-1}] = H^*(BSO(2k-1); \mathbb{Q}).$$

Для доказательства последнего соотношения теоремы 3 необходимо изучить отображение

$$j_n: \underbrace{BSO(2) \times \dots \times BSO(2)}_{n \text{ раз}} \rightarrow BSO(2n)$$

и доказать, что образ кольца когомологий $H^*(BSO(2n); \mathbb{Q})$ при гомоморфизме j_n^* совпадает с кольцом симметрических многочленов от перемен-

ных $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$, где $t_k \in H^2 \underbrace{(BSO(2) \times \dots \times BSO(2))}_{n \text{ раз}}; \mathbb{Q}$ — образую-

щие группы двумерных когомологий.

Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 3.

Построенные в теореме 3 характеристические классы $p_k \in H^{4k}(BSO(n); \mathbb{Q})$ называются *рациональными классами Понтрягина*. Класс $\chi \in H^{2n}(BSO(2n); \mathbb{Q})$ называется *эйлеровым классом*.

Т е о р е м а 4. Кольцо $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n]$, $w_k \in H^k(BO(n); \mathbb{Z}_2)$. Образующие w_k можно выбрать таким образом, что выполнены следующие условия:

а) $w_k(\xi) = 0$, если $k > \dim \xi$;

б) $w_k(\xi \oplus 1) = w_k(\xi)$;

в) $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{\alpha + \beta = k} w_\alpha(\xi) w_\beta(\eta)$.

Эту теорему мы оставляем без доказательства. Классы w_k называют *характеристическими классами Штифеля — Уитни*. Поскольку $H^1(BO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \ni w_1$, а отображение $BSO(n) \rightarrow BO(n)$ можно рассматривать как двулистное накрытие, то структурная группа $O(n)$ расслоения ξ редуцируется к подгруппе $SO(n)$ тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$. Такие расслоения являются *ориентируемыми расслоениями*.

П р и м е р 2. Рассмотрим пространство $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ и универсальное одномерное расслоение Хопфа ξ над ним. Очевидно, $w_1(\xi) = w_1 \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ — образующий элемент. Имеем $w_1(\xi \oplus \xi) = w_1(\xi) \oplus w_1(\xi) = 2w_1 = 0$. Следовательно, расслоение $\xi \oplus \xi$ уже ориентируемо. Расслоение $\xi \oplus \xi$ нетривиально, поскольку $w_2(\xi \oplus \xi) = w_1(\xi) w_1(\xi) = w_1^2 \neq 0$.

§ 5. Геометрическая интерпретация некоторых характеристических классов

1. Эйлеров класс. Пусть X — гладкое замкнутое ориентированное многообразие, $\dim X = 2n$. Поставим вопрос: существует ли на многообразии X векторное поле, ненулевое в каждой точке? Пусть TX — касательное расслоение, SX — расслоение, составленное из касательных векторов единичной длины. Тогда существование ненулевого векторного поля, или, что то же самое, ненулевого сечения, в касательном расслоении TX эквивалентно существованию сечения в расслоении SX . Рассмотрим расслоение $SX \rightarrow X$ со слоем S^{2n-1} . Оно, очевидно, классифицируется отображением $X \rightarrow BSO(2n)$ и универсальным расслоением $SES(2n) \rightarrow BSO(2n)$ со слоем S^{2n-1} . Пространство $BSO(2n)$ удобно представить как пространство $2n$ -мерных ориентированных плоскостей, проходящих через начало координат бесконечномерного векторного пространства. Тогда точки пространства $SES(2n)$ — это пары (L, l) , где L — $2n$ -мерная плоскость, а $l \in L$ — вектор единичной длины в этой плоскости.

Пусть $l^\perp \subset L$ — $(2n-1)$ -мерная плоскость, ортогональная к вектору l . Получаем соответствие $(L, l) \rightarrow l^\perp$, задающее отображение

$$SES(2n) \rightarrow BSO(2n-1).$$

Это отображение является локально тривиальным расслоением, слоем которого является бесконечномерная сфера. Пространства $SES(2n)$ и $BSO(2n-1)$ гомотопически эквивалентны. Таким образом, расслоение $SX \rightarrow X$ классифицируется расслоением $BSO(2n-1) \rightarrow BSO(2n)$ со слоем S^{2n-1} .

Пусть $E_s^{p,q}$ — спектральная последовательность универсального расслоения, $E_s^{p,q}(X)$ — спектральная последовательность расслоения $SX \rightarrow$

$\rightarrow X, f: E_s^{p,q} \rightarrow E_s^{p,q}(X)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением $X \rightarrow BSO(2n)$ и отображением тотальных пространств. Тогда $f^*(\chi) \in H^{2n}(X) = E_2^{2n,0}(X)$ — эйлеров класс многообразия X . Как показано в § 4 (теорема 3), проекция $p: BO(2n-1) \rightarrow BO(2n)$ переводит эйлеров класс в нуль. Значит, и для проекции $p': SX \rightarrow X$ получаем равенство $p'^*(f^*(\chi)) = 0$. Если $\alpha: X \rightarrow SX$ — сечение, то $0 = \alpha^* p'^*(f^*(\chi)) = f^*(\chi)$. Поэтому для того, чтобы существовало ненулевое векторное поле на многообразии X , необходимо, чтобы эйлеров класс многообразия X был тривиальным.

2. Препятствие к построению сечений. В § 4 эйлеров класс был определен для когомологий с рациональными коэффициентами. Однако его можно определить и для целочисленных когомологий. Оказывается, что условие тривиальности эйлерова класса над \mathbb{Z} достаточно для существования ненулевого векторного поля на ориентируемом $2n$ -мерном многообразии. Впрочем, если многообразие ориентируемо, то из тривиальности рационального эйлерова класса следует тривиальность и целочисленного эйлерова класса, поскольку группа когомологий в размерности $2n$ не имеет в этом случае кручения.

Вообще, вопрос о возможности построения сечения некоторого локально тривиального расслоения упирается в некоторые препятствия гомологического характера. Некоторые из них можно описать с помощью характеристических классов.

Пусть $p: E \rightarrow X$ — локально тривиальное расслоение со слоем F и базой X , являющейся клеточным пространством. Допустим, что построено сечение $s: [X]^{n-1} \rightarrow E$ над $(n-1)$ -мерным остовом базы X . Спрашивается, можно ли продолжить сечение s на n -мерный остов $[X]^n$. Для этого достаточно продолжить сечение s на каждую n -мерную клетку $\sigma_i \subset X$ в отдельности. Поскольку над клеткой σ_i расслоение p тривиально, т.е. $p^{-1}(\sigma_i) \approx \sigma_i \times F$, то ограничение сечения s на границу клетки $\partial\sigma_i$ определяет отображение границы $\partial\sigma_i$ в слой F ,

$$s: \partial\sigma_i \rightarrow F,$$

и определяет элемент $[s]_i \in \pi_{n-1}(F)$ гомотопической группы слоя F . Чтобы определение не зависело от выбора фиксированной точки слоя F , а также от выбора самого слоя F , будем считать, что база X односвязна. Таким образом, необходимое и достаточное условие продолжения сечения s на n -мерный остов $[X]^n$ заключается в соотношениях

$$[s]_i = 0 \in \pi_{n-1}(F). \quad (1)$$

Если же хотя бы одно из равенств (1) не выполняется, то сечение s нельзя продолжить на n -мерный остов $[X]^n$, так что коцепь $[s]$ в группе коцепей $C^n(X, \pi_{n-1}(F))$, определяемая сечением s , может считаться препятствием к продолжению сечения s на n -мерный остов. Коцепь $[s] \in C^n(X, \pi_{n-1}(F))$ не может быть произвольной. Оказывается, что кограница коцепи $[s]$ равна нулю,

$$\partial[s] = 0,$$

т.е. коцепь $[s]$ является коциклом. В самом деле, пусть Σ — $(n+1)$ -мерная клетка, $s^n = \partial\Sigma \rightarrow [X]^n \rightarrow [X]^n/[X]^{n-1} = \bigvee \sigma_i$ — отображение границы клетки Σ . Тогда без ограничения общности можно считать, что сечение $s|_{\partial\sigma_i}$ гомотопно отображению, которое разлагается в композицию $\partial\sigma_i \rightarrow [X]^{n-1}/[X]^{n-2} \rightarrow F$. Значение коцепи $[s]$ на клетке σ_i определяется как линейная комбинация элементов $\pi_{n-1}(F)$, представленных сферами из букета $(n-1)$ -мерных сфер $[X]^{n-1}/[X]^{n-2}$, коэффициенты которой равны коэффициентам граничного гомоморфизма в группах цепей. Поскольку квадрат граничного гомоморфизма равен нулю, то и кограница $\partial[s] = 0$.

Оказывается, что если коцикл $[s] \in C^n(X, \pi_{n-1}(F))$ кохомологичен нулю, то существует другое сечение $s': [X]^{n-1} \rightarrow E$, совпадающее с сечением s на остове $[X]^{n-2}$ и продолжающееся на остов $[X]^n$. Если же класс кохомологий $[s] \in H^n(X, \pi_{n-1}(F))$ не равен нулю, то сечение s нельзя продолжить на остов $[X]^n$, даже изменив его на предыдущем остове $[X]^{n-1}$. Класс кохомологий $[s] \in H^n(X, \pi_{n-1}(F))$ называют *препятствием к продолжению сечения*. Используя информацию о препятствиях к продолжению сечений, можно доказывать существование или отсутствие сечений тех или иных расслоений. Если n — наименьшее число, для которого группа $H^n(X, \pi_{n-1}(F)) \neq 0$, то соответствующее препятствие $[s]$ называют *первым препятствием к построению сечения*.

Теорема 1. Пусть $p: E \rightarrow X$ — локально тривиальное расслоение, X — односвязное клеточное пространство, $\pi_0(F) = \dots = \pi_{n-2}(F) = 0$, $\pi_{n-1}(F) = \mathbb{Z}$, $a \in H^{n-1}(F; \mathbb{Z})$ — образующий элемент, $E_s^{p,q}$ — спектральная последовательность расслоения p , $w = d_n(a) \in E_n^{n,0}$. Тогда $E_n^{n,0} = E_2^{n,0} = H^n(X; \mathbb{Z})$, а элемент w является первым препятствием к построению сечения рассматриваемого расслоения.

Доказательство. Спектральная последовательность расслоения $p: E \rightarrow X$ имеет отличные от нуля члены только в нулевой строке и в строках, начиная с $E_2^{*,n-1}$ (рис. 8). Поэтому все члены $E_2^{p,0}$ при $p < n$ сохраняются до бесконечности, а при $p = n$ получаем равенства $E_2^{n,0} = E_n^{n,0}$, $E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} = E_2^{n,0} / \{w\}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\dim X = n$, поскольку вложение n -мерного остова $[X]^n \subset X$ индуцирует мономорфизм в кохомологиях до размерности n включительно. Таким образом, пространство X является объединением своего $(n-1)$ -мерного остова $[X]^{n-1}$ и n -мерных клеток σ_i , "приклеенных" по некоторым отображениям $\varphi_i: \partial\sigma_i \rightarrow [X]^{n-1}$. Топальное пространство расслоения является объединением $[E]^{n-1}$ — топального пространства расслоения над $[X]^{n-1}$ — и декартовых произведений $\sigma_i \times F$, "приклеенных" по некоторым послойным отображениям $\psi_i: \partial\sigma_i \times F \rightarrow [E]^{n-1}$. Кохомологии пространства $[E]^{n-1}$ имеют следующий вид:

$$H^i([E]^{n-1}) = H^i(X) \text{ при } i < n-1,$$

$$H^{n-1}([E]^{n-1}) = H^{n-1}([X]^{n-1}) \oplus \mathbb{Z}, \quad H^n([E]^{n-1}) = H^n(F).$$

Отображение ψ_i индуцирует в гомологиях гомоморфизм

$$\psi_i^*: H_*(\partial\sigma_i \times F) \rightarrow H_*([E]^{n-1}),$$

который переводит образующий элемент $a_{n-1} \in H_{n-1}(\partial\sigma_i)$ в элемент $[s]_i \in H_{n-1}([E]^{n-1})$. Отображение группы $H_*(F)$ в группу $H_*([E]^{n-1})$

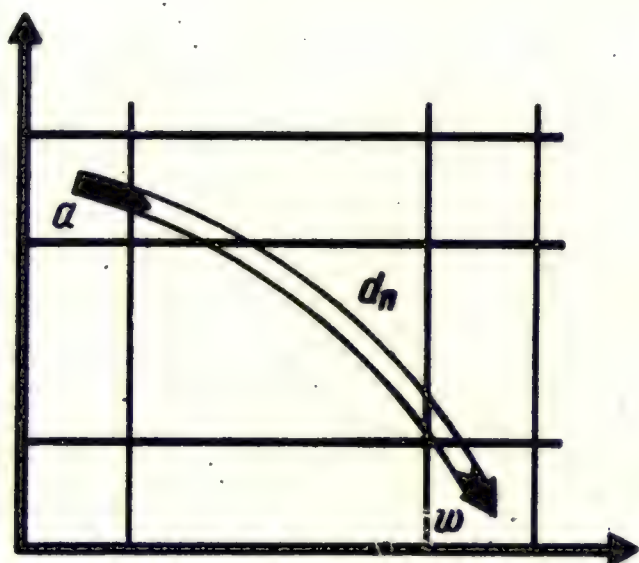


Рис. 8.

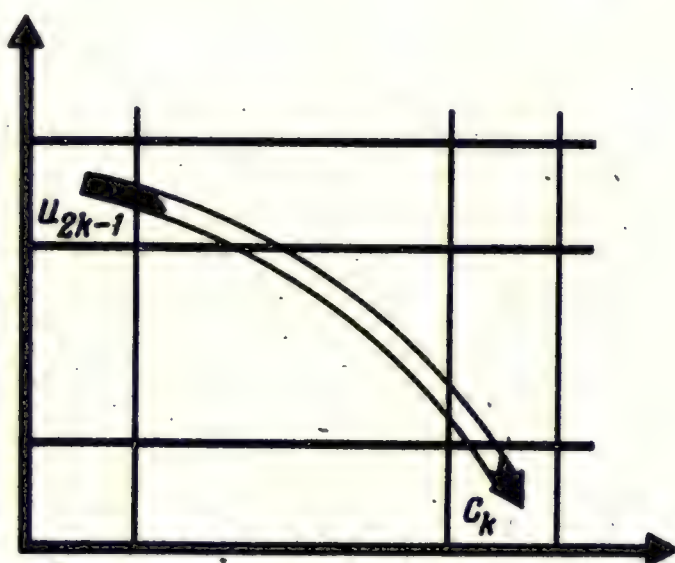


Рис. 9.

индуцировано вложением слоя F в тотальное пространство. Значит, в когомологиях получаем гомоморфизм

$$H^{n-1}([E]^{n-1}) = H^{n-1}([X]^{n-1}) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_i^*}$$

$$\xrightarrow{\psi_i^*} H^{n-1}(\partial\sigma_i \times F) = H^{n-1}(\partial\sigma_i) \oplus H^{n-1}(F) = H^{n-1}(\partial\sigma_i) \oplus \mathbb{Z},$$

$$\psi_i^* = \begin{vmatrix} \varphi_i & [s]_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим две пары $[X]^{n-1} \subset X$ и $[E]^{n-1} \subset E$ и их точные когомологические последовательности:

$$0 \leftarrow H^n(X) \leftarrow H^n(X, [X]^{n-1}) \xrightarrow{\varphi^*} H^{n-1}([X]^{n-1}) \leftarrow \dots$$

$$\dots \leftarrow H^n(E) \leftarrow H^n(E, [E]^{n-1}) \xrightarrow{\psi^*} H^{n-1}([E]^{n-1}) \leftarrow \dots$$

Группы $H^n(E, [E]^{n-1})$ и $H^n(X, [X]^{n-1})$ изоморфны, а

$$H^{n-1}([E]^{n-1}) \approx H^{n-1}([X]^{n-1}) \oplus H^{n-1}(F),$$

причем $\psi^* = (\varphi^*, \bigvee [s]_i)$, поскольку $X/[X]^{n-1} = \bigvee \sigma_i$ — букет n -мерных сфер. Таким образом, образ $\text{Im}(H^n(E, [E]^{n-1})) \rightarrow H^n(E)$ изоморфен факторгруппе $H^n(X)/\{[s]\}$. С другой стороны, эта же группа изоморфна члену $E_{\infty}^{n,0}$ спектральной последовательности. Значит, $H^n(X)/\{w\} = H^n(X)/\{[s]\}$, т.е. $w = [s]$. Теорема 1 доказана.

Применяя теорему 1 к характеристическим классам, получаем следующую интерпретацию характеристических классов.

Т е о р е м а 2. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение над базой X . Тогда характеристический класс Чженя $c_k(\xi) \in H^{2k}(X; \mathbb{Z})$ совпадает с первым препятствием к построению $n - k + 1$ линейно независимых сечений в расслоении ξ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построить $n - k + 1$ линейно независимых сечений в расслоении ξ — это то же самое, что представить расслоение ξ в виде суммы

$$\xi = \eta \oplus \overbrace{n - k + 1}^{n - k + 1}. \quad (2)$$

Рассмотрим расслоение

$$p: BU(k-1) \rightarrow BU(n) \quad (3)$$

со слоем $U(n)/U(k-1)$. Пусть $f: X \rightarrow BU(n)$ — непрерывное отображение, индуцирующее расслоение ξ , т.е. $\xi = f^*(\xi_n)$. Представить расслоение в виде (2) — это значит построить такое отображение $g: X \rightarrow BU(k-1)$, что $pg \sim f$. Другими словами, первое препятствие к построению $n - k + 1$ линейно независимых сечений в расслоении ξ совпадает с прообразом первого препятствия к построению сечения расслоения p при отображении f .

Применим теорему 1. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения (рис. 9). Поскольку $p^*(c_k) = 0$, то элемент $c_k \in E_2^{2k,0}$ является образом при дифференциале d_{2k} , т.е. $d_{2k}(u_{2k-1}) = c_k$. Согласно теореме 1 $f^*(c_k) = c_k(\xi)$ и является первым препятствием к построению $n - k + 1$ линейно независимых сечений расслоения ξ .

Аналогичная интерпретация имеется и для характеристических классов Штифеля — Уитни и классов Понтрягина.

§ 6. K -теория и характер Черна*)

Множество векторных расслоений над фиксированной базой не является группой относительно операции прямой суммы векторных расслоений, поскольку операция вычитания существует не для любых векторных расслоений. Поэтому множество векторных расслоений дополняют до группы формальными разностями векторных расслоений. Если пространство X несвязно, то под векторным расслоением мы будем понимать расслоение, которое, вообще говоря, над каждой компонентой связности имеет различную размерность. Точнее, рассматриваются объединения локально тривиальных векторных расслоений различных, вообще говоря, размерностей над компонентами связности пространства X . Такие объединения по-прежнему будут называться векторными расслоениями.

Через $K(X)$ обозначим абелеву группу, которая определяется как группа с образующими и соотношениями следующим образом: система образующих — это множество векторных расслоений над X , а система определяющих соотношений — это соотношения вида

$$[\xi] + [\eta] - [\xi \oplus \eta] = 0, \quad (1)$$

где ξ, η — произвольные векторные расслоения над X , а $[\xi]$ обозначает элемент группы $K(X)$, определяемый расслоением ξ . Так определенную группу называют группой Гротендика категории всех векторных расслоений над базой X .

Поскольку векторные расслоения могут нести дополнительную структуру, то, чтобы не возникало путаницы, группу, порожденную вещественными векторными расслоениями, будем обозначать через $K_0(X)$, группу, порожденную комплексными векторными расслоениями, — через $K_U(X)$, а группу, порожденную кватернионными расслоениями, — через $K_{Sp}(X)$.

Соотношения (1) показывают, что операция прямой суммы векторных расслоений в группе $K(X)$ совпадает с групповой операцией. Далее, поскольку всякий элемент $x \in K(X)$ разлагается (вообще говоря, неоднозначно) в линейную комбинацию векторных расслоений с целыми коэффициентами:

$$x = \sum_{i=1}^p n_i [\xi_i], \quad (2)$$

сумму в правой части (2) можно представить в виде двух слагаемых

$$x = \sum_{i=1}^{p_1} n_i [\xi_i] - \sum_{j=1}^{p_2} m_j [\eta_j], \quad n_i > 0, \quad m_j > 0. \quad (3)$$

Используя соотношения (1), получаем, что

$$\begin{aligned} x &= \left[\bigoplus_{i=1}^{p_1} \underbrace{(\xi_i \oplus \dots \oplus \xi_i)}_{n_i \text{ раз}} \right] - \left[\bigoplus_{j=1}^{p_2} \underbrace{(\eta_j \oplus \dots \oplus \eta_j)}_{m_j \text{ раз}} \right] = \\ &= [\xi_1] - [\xi_2]. \end{aligned} \quad (4)$$

*) В настоящее время фамилия этого математика китайского происхождения по-русски обычно передается как "Чжень" (см. классы Чжени, с. 74). Однако выражение "характер Черна" широко распространено в нашей математической литературе, и мы сохраняем его здесь. — *Прим. ред.*

Таким образом, любой элемент $x \in K(X)$ представляется в виде разности двух векторных расслоений, точнее, в виде разности элементов, каждый из которых представлен некоторым расслоением. Если пространство является конечным клеточным пространством, то в формуле (4) можно предполагать, что одно из расслоений ζ_1 или ζ_2 является тривиальным расслоением. В самом деле, на основании теоремы 2 из § 4 главы 1 найдется такое расслоение ζ_3 , что прямая сумма $\zeta_2 \oplus \zeta_3$ изоморфна тривиальному расслоению. Тогда разность имеет вид

$$\begin{aligned} [(\zeta_1 \oplus \zeta_3)] - [(\zeta_2 \oplus \zeta_3)] &= [\zeta_1] + [\zeta_3] - ([\zeta_2] + [\zeta_3]) = \\ &= ([\zeta_1] - [\zeta_2]) + ([\zeta_3] - [\zeta_3]) = [\zeta_1] - [\zeta_2] = x \in K(X). \end{aligned} \quad (5)$$

Два расслоения ξ_1 и ξ_2 определяют в группе $K(X)$ один элемент тогда и только тогда, когда найдется такое тривиальное расслоение \bar{N} , что прямая сумма $\xi_1 \oplus \bar{N}$ изоморфна прямой сумме $\xi_2 \oplus \bar{N}$. Условие

$$\xi_1 \oplus \bar{N} = \xi_2 \oplus \bar{N} \quad (6)$$

называется *стабильной изоморфностью векторных расслоений*. Это название оправдано тем, что если $\xi_1 \oplus \bar{N} = \xi_2 \oplus \bar{N} \in K(X)$, то

$$[\xi_1] + [\bar{N}] = [\xi_2] + [\bar{N}]$$

по свойству (1), а значит, $[\xi_1] = [\xi_2]$.

Допустим, что если $[\xi_1] = [\xi_2]$, то согласно определению в свободной абелевой группе, порожденной множеством векторных расслоений над пространством X , разность $\xi_1 - \xi_2$ разлагается в линейную комбинацию элементов вида (1), т.е.

$$\xi_1 - \xi_2 = \sum_j \lambda_j (\xi_j + \eta_j - \xi_j \oplus \eta_j), \quad (7)$$

где $\lambda_j = \pm 1$. Соотношение (7) преобразуем следующим образом: перенесем все слагаемые с отрицательными коэффициентами в другую сторону соотношения. Тогда соотношение (7) примет вид

$$\xi_1 + \sum_j (\xi_j \oplus \eta_j) + \sum_k (\xi_k + \eta_k) = \xi_2 + \sum_j (\xi_j + \eta_j) + \sum_k (\xi_k \oplus \eta_k). \quad (8)$$

В левой и правой частях соотношения (8) стоит формальная сумма расслоений, значит, каждое слагаемое в левой части соотношения (8) изоморфно некоторому слагаемому в правой части и наоборот. Следовательно, прямая сумма всех слагаемых в левой части соотношения (8) изоморфна прямой сумме всех слагаемых в правой части этого же соотношения. Поэтому

$$\xi_1 \oplus \oplus_j (\xi_j \oplus \eta_j) \oplus \oplus_k (\xi_k \oplus \eta_k) = \xi_2 \oplus \oplus_j (\xi_j \oplus \eta_j) \oplus \oplus_k (\xi_k \oplus \eta_k). \quad (9)$$

Положим

$$\eta = \oplus_j (\xi_j \oplus \eta_j) \oplus \oplus_k (\xi_k \oplus \eta_k),$$

а через ζ обозначим такое расслоение, чтобы прямая сумма $\zeta \oplus \eta$ была тривиальным расслоением. Тогда из соотношения (9) вытекает, что

$$\xi_1 \oplus (\zeta \oplus \eta) = \xi_2 \oplus (\zeta \oplus \eta),$$

т.е. справедливо соотношение (6).

В группе $K(X)$ операция тензорного произведения расслоений индуцирует кольцевую структуру. Условия ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности в кольце $K(X)$ непосредственно вытекают из аналогичных условий для векторных расслоений.

Примеры. 1. Опишем кольцо $K(x_0)$, где x_0 — одноточечное пространство. Каждое векторное расслоение над точкой x_0 тривиально и определяется одним числовым параметром — размерностью единственного слоя. Поэтому множество всех векторных расслоений над точкой x_0 вместе с операцией прямой суммы и тензорного произведения изоморфно полугруппе положительных целых чисел. Кольцо же $K(x_0)$ поэтому изоморфно кольцу целых чисел \mathbb{Z} . При этом разности $[\xi] - [\eta]$ двух расслоений соответствует число $\dim \xi - \dim \eta \in \mathbb{Z}$.

2. Если $X = \{x_1, x_2\}$ — двухточечное пространство, то каждое векторное расслоение определяется уже двумя целыми числами — размерностью слоя над точкой x_1 и размерностью слоя над точкой x_2 . Поэтому $K(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Группа $K(X)$ является кольцом, при этом любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует кольцевой гомоморфизм

$$f^*: K(Y) \rightarrow K(X), \quad (10)$$

который каждому расслоению ξ над пространством Y сопоставляет его прообраз $f^*(\xi)$.

Если $f, g: X \rightarrow Y$ — два гомотопных отображения, то они индуцируют равные гомоморфизмы

$$f^* = g^*: K(Y) \rightarrow K(X). \quad (11)$$

В самом деле, поскольку отображения f и g гомотопны, то существует такое непрерывное отображение

$$F: X \times I \rightarrow Y,$$

что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. По теореме 3 из § 2 главы 1 ограничения расслоения $F^*(\xi)$ на подпространства $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ изоморфны. Значит, $f^*(\xi) = g^*(\xi)$. Следовательно, если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то кольца $K(X)$ и $K(Y)$ изоморфны.

Условия (10) и (11) показывают, что соответствие $X \rightarrow K(X)$ является гомотопическим функтором из категории клеточных пространств в категорию колец.

Покажем, что этот функтор можно распространить и построить аналог обобщенной теории гомологий.

Пусть (X, x_0) — клеточное пространство с отмеченной точкой. Тогда вложение $x_0 \rightarrow X$ индуцирует гомоморфизм колец $K(X) \rightarrow K(x_0) = \mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм для разности двух расслоений $[\xi] - [\eta]$ задается формулой

$$\dim \xi - \dim \eta \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Поэтому сам гомоморфизм мы будем обозначать тоже через

$$\dim: K(X) \rightarrow K(x_0). \quad (13)$$

Обозначим через $K^0(X, x_0)$ ядро гомоморфизма (13):

$$K^0(X, x_0) = \text{Ker } \dim (K(X) \rightarrow K(x_0)). \quad (14)$$

Элементы подкольца $K^0(X, x_0)$ представляются разностями $[\xi] - [\eta]$, для которых $\dim \xi = \dim \eta$. Можно еще сказать, что элементы кольца $K(X)$ — это "виртуальные" расслоения, а элементы кольца $K^0(X, x_0)$ — это "виртуальные" расслоения нулевой размерности над точкой x_0 .

Пусть (X, Y) , $Y \subset X$ — пара клеточных пространств, $x_0 \in Y$ — отмеченная точка. Обозначим через $K^0(X, Y)$ кольцо $K^0(X/Y, [Y])$. Пространство X/Y гомотопически эквивалентно объединению пространства X и конуса CY с основанием Y (рис. 10).

Отмеченной точкой может служить как точка x_0 , так и вершина конуса c . Проекция $X \rightarrow X/Y$ и вложение $X \rightarrow X \cup CY$ согласованы с гомотопической эквивалентностью $X \cup CY \rightarrow X/Y$. Далее, факторпространство $(X \cup CY)/X$ есть не что иное, как надстройка $S^1 Y$ над пространством Y . С другой стороны, это же пространство гомотопически эквивалентно объединению двух конусов — один с основанием X , а другой с основанием Y : $S^1 Y \sim CX \cup CY$ (рис. 11).

Факторпространство $(CX \cup CY)/(X \cup CY)$ есть не что иное, как надстройка $S^1 X$, а проекция $CX \cup CY \rightarrow S^1 X$ согласована с отображением $S^1 Y \rightarrow S^1 X$ и гомотопической эквивалентностью $CX \cup CY \rightarrow S^1 Y$. Таким образом, для пары (X, Y) получается целая последовательность отображений

$$\begin{aligned} Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/Y \xrightarrow{\partial} S^1 Y \xrightarrow{S^1 i} S^1 X \xrightarrow{S^1 j} S^1(X/Y) \xrightarrow{S^1 \partial} \dots \\ \dots \rightarrow S^k Y \xrightarrow{S^k i} S^k X \xrightarrow{S^k j} S^k(X/Y) \xrightarrow{S^k \partial} \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Для любого члена последовательности (14) все пространства можно так заменить на гомотопически эквивалентные, чтобы предыдущее пространство было вложено в данное, а последующее было факторпространством по предыдущему.

Теорема 1. *Индукцируемая последовательностью (14) последовательность колец*

$$\begin{aligned} K^0(Y, x_0) \xleftarrow{i^*} K^0(X, x_0) \xleftarrow{j^*} K^0(X, Y) \xleftarrow{\partial^*} \\ \xleftarrow{\partial^*} K^0(S^1 Y, x_0) \xleftarrow{(S^1 i)^*} \dots \xleftarrow{\partial^*} K^0(S^k Y, x_0) \xleftarrow{\partial^*} \\ \xleftarrow{\partial^*} K^0(S^k X, x_0) \xleftarrow{\partial^*} K^0(S^k X, S^k Y) \xleftarrow{\partial^*} \dots \end{aligned} \quad (15)$$

является точной последовательностью.

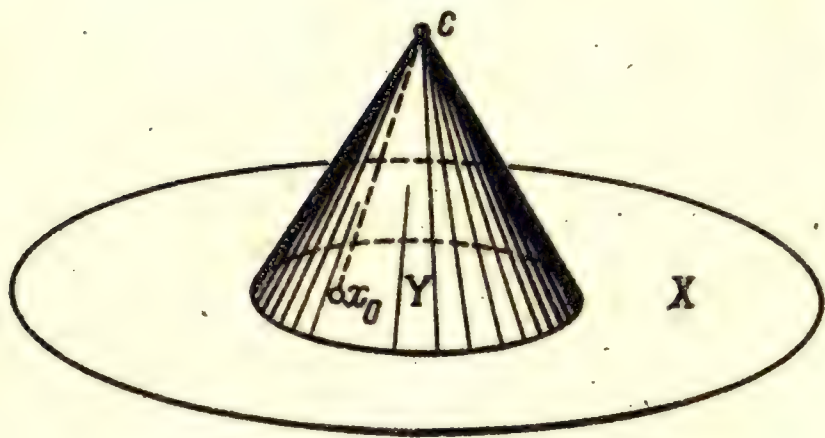


Рис. 10.

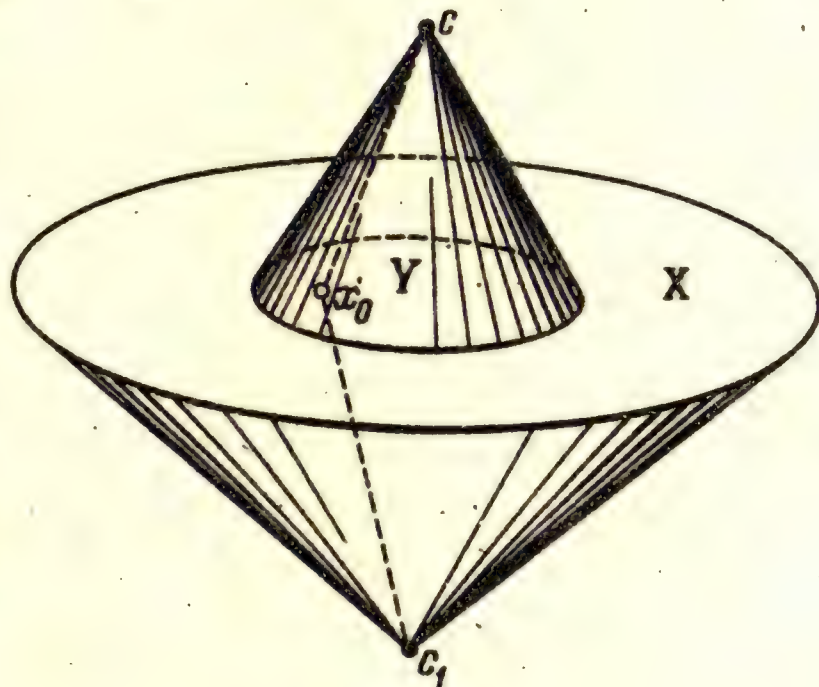


Рис. 11.

Доказательство. Исходя из приведенного перед теоремой 1 замечания, достаточно проверить точность последовательности

$$K^0(Y, x_0) \xleftarrow{j^*} K^0(X, x_0) \xleftarrow{j^*} K^0(X, Y) \quad (16)$$

в среднем члене.

Итак, пусть ξ — такое расслоение над X , что его ограничение на подпространство Y тривиально. Тогда расслоение ξ тривиально в некоторой окрестности $U \supset Y$, т.е. $\xi|_U \approx U \times \mathbb{R}^n$ (или $\xi|_U \approx U \times \mathbb{C}^n$ в случае комплексных расслоений). Следовательно, окрестность U может служить картой некоторого атласа для расслоения ξ , причем остальные карты этого атласа можно выбрать таким образом, чтобы они не пересекались с подмножеством Y . Тогда все функции склейки определены в точках $X \setminus Y$, т.е. они же задают некоторое расслоение η над X/Y , прообраз которого над пространством X и есть расслоение ξ , т.е. $j^*([\eta]) = [\xi]$. Теорема 1 доказана.

Точная последовательность (15) называется *точной последовательностью пары в K-теории*.

Обозначим группу $K^0(S^n X, S^n Y)$ через $K^{-n}(X, Y)$. Получаем систему групп $K^n(X, Y)$, градуированную неположительными целыми числами n , удовлетворяющую аксиомам обобщенной теории когомологий.

В § 4 мы определили характеристические классы Чженя для каждого комплексного векторного расслоения. Согласно теореме 2 § 4 произвольный характеристический класс является многочленом от классов Чженя $c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)$ с целыми коэффициентами. Если рассматривать характеристические классы в когомологиях с рациональными коэффициентами, то все они выражаются через классы Чженя как многочлены с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим функцию

$$\varphi^n(t_1, \dots, t_n) = e^{t_1} + e^{t_2} + \dots + e^{t_n}. \quad (17)$$

Функция (17) разлагается в ряд Тейлора по степеням переменных t_1, \dots, t_n :

$$\varphi^n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_1^k + \dots + t_n^k}{k!}. \quad (18)$$

Каждый член ряда (18) является симметрическим многочленом от переменных t_1, \dots, t_n и поэтому выражается в виде некоторого многочлена от элементарных симметрических многочленов:

$$\frac{1}{k!} (t_1^k + \dots + t_n^k) = \varphi_k^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

$$\sigma_1 = \sigma_1(t_1, \dots, t_n) = t_1 + \dots + t_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma_n = \sigma_n(t_1, \dots, t_n) = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Другими словами,

$$\varphi^n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (20)$$

Дадим следующее определение: пусть ξ — n -мерное комплексное векторное расслоение над пространством X . Характеристический класс

$$\text{ch } \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \text{ch}_k \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^n(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) \quad (21)$$

назовем *характером Черна* расслоения ξ . В формуле (21) каждое слагаемое $\varphi_k^n(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi))$ является элементом группы кохомологий $H^{2k}(X; \mathbb{Q})$. Если пространство X является конечным клеточным комплексом, то характер Черна $\text{ch } \xi$ является неоднородным элементом группы кохомологий

$$H^{2*}(X; \mathbb{Q}) = \oplus H^{2k}(X; \mathbb{Q}),$$

поскольку, начиная с некоторого номера k_0 , все группы кохомологий пространства X равны нулю. В общем же случае мы можем считать, что формула (21) задает элемент группы

$$H^{**}(X; \mathbb{Q}) = \prod_{k=0}^{\infty} H^k(X; \mathbb{Q}).$$

Теорема 2. *Характер Черна удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\text{ch}(\xi \oplus \eta) = \text{ch}(\xi) + \text{ch}(\eta)$;

б) $\text{ch}_0 \xi = \dim \xi$;

в) $\text{ch}(\xi \otimes \eta) = \text{ch} \xi \text{ch} \eta$.

Доказательство. Так же, как и в § 4, классы Чженя удобно представлять как элементарные симметрические многочлены от некоторых переменных. Тогда

$$c_k(\xi) = \sigma_k(t_1, \dots, t_n), \quad (22)$$

$$c_k(\eta) = \sigma_k(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}), \quad (23)$$

$$c_k(\xi \oplus \eta) = \sigma_k(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}). \quad (24)$$

Согласно формуле (21) имеем

$$\text{ch}_k(\xi) = \varphi_k^n(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) = \frac{1}{k!} (t_1^k + \dots + t_n^k), \quad (25)$$

$$\text{ch}_k(\eta) = \varphi_k^m(c_1(\eta), \dots, c_m(\eta)) = \frac{1}{k!} (t_{n+1}^k + \dots + t_{n+m}^k), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{ch}_k(\xi \oplus \eta) &= \varphi_k^{(n+m)}(c_1(\xi \oplus \eta), \dots, c_{n+m}(\xi \oplus \eta)) = \\ &= \frac{1}{k!} (t_1^k + \dots + t_n^k + t_{n+1}^k + \dots + t_{n+m}^k) = \text{ch}_k(\xi) + \text{ch}_k(\eta). \end{aligned} \quad (27)$$

Из формулы (27) следует свойство а). Свойство б) следует из того, что

$$\text{ch}_0 \xi = \varphi_0^n(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) = n = \dim \xi.$$

Приведенное доказательство свойства а), строго говоря, некорректно, поскольку формулам (22) — (24) не придано никакого смысла. Придать же им смысл можно следующим образом. Все три равенства в теореме 2 достаточно проверять не для произвольной базы, а для специального пространства $X = BU(n) \times BU(m)$, где $\xi = \xi_n$ — универсальное расслоение над сомножителем $BU(n)$, а $\eta = \xi_m$ — универсальное расслоение над сомножителем $BU(m)$. Пусть

$$f: BU(n) \times BU(m) \rightarrow BU(n+m)$$

— такое отображение, при котором $f^*(\xi_{n+m}) = \xi_n \oplus \xi_m$. Требуется доказать, что

$$f^*(\text{ch } \xi_{n+m}) = \text{ch } \xi_n + \text{ch } \xi_m. \quad (28)$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} BU(n) \times BU(m) & \xrightarrow{f} & BU(n+m) \\ \swarrow p & & \nearrow q \\ \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{n \text{ раз}} \times \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{m \text{ раз}} & & \end{array}$$

где p, q — отображения, соответствующие вложению группы диагональных матриц в унитарную группу. В обозначениях § 4 $p = j_n \times j_m, q = j_{n+m}$. Согласно лемме § 4 оба гомоморфизма p^* и q^* в когомологиях являются мономорфизмами. Поэтому равенство (28) вытекает из равенства

$$p^* f^*(\text{ch } \xi_{n+m}) = p^* \text{ch } \xi_n + p^* \text{ch } \xi_m,$$

т.е.

$$q^* \text{ch } \xi_{n+m} = p^* \text{ch } \xi_n + p^* \text{ch } \xi_m,$$

или

$$\text{ch } q^* \xi_{n+m} = \text{ch } p^* \xi_n + \text{ch } p^* \xi_m. \quad (29)$$

Далее, над пространством $X = \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{n \text{ раз}} \times \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{m \text{ раз}}$

имеются расслоения $\eta_i, 1 \leq i \leq n+m$, являющиеся универсальными одномерными расслоениями над сомножителями с номером i . Тогда

$$q^* \xi_{n+m} = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_{n+m},$$

$$p^* \xi_n = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n, \quad p^* \xi_m = \eta_{n+1} \oplus \dots \oplus \eta_{n+m}.$$

Поэтому, если $t_i = c_1(\eta_i)$, то формулы (22) — (24), а вместе с ними и формулы (25) — (27) уже имеют смысл.

Перейдем теперь к доказательству свойства в) теоремы 2. Так же, как и в случае аддитивности характера Черна, достаточно доказать свойство в) для случая пространства $Y = BU(n) \times BU(m)$ и расслоений $\xi = \xi_n, \eta = \xi_m$.

Поскольку отображение $X = \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{n \text{ раз}} \times \underbrace{BU(1) \times \dots \times BU(1)}_{m \text{ раз}} \xrightarrow{p} BU(n) \times BU(m) = Y$ индуцирует мономорфизм в когомологиях, то свойство в) достаточно доказать для пространства X и расслоений

$$\xi = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n, \quad \eta = \eta_{n+1} \oplus \dots \oplus \eta_{n+m}.$$

Тогда

$$c_k(\xi) = \sigma_k(t_1, \dots, t_n), \quad c_k(\eta) = \sigma_k(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}).$$

Следовательно,

$$\text{ch}_k(\xi) = \frac{1}{k!} (t_1^k + \dots + t_n^k), \quad \text{ch}_k(\eta) = \frac{1}{k!} (t_{n+1}^k + \dots + t_{n+m}^k),$$

или

$$\text{ch}(\xi) = e^{t_1} + \dots + e^{t_n}, \quad (30)$$

$$\text{ch}(\eta) = e^{t_{n+1}} + \dots + e^{t_{n+m}}. \quad (31)$$

С другой стороны, расслоение $\xi \otimes \eta$ разлагается в прямую сумму одномерных расслоений

$$\xi \otimes \eta = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m (\eta_i \otimes \eta_{n+j}) = \bigoplus_{i,j} \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \eta_i \otimes \eta_{n+j}.$$

Поэтому

$$\text{ch}(\xi \otimes \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e^{c_1(\eta_i \otimes \eta_{n+j})}. \quad (32)$$

Остается вычислить первый класс Чженя $c_1(\xi' \otimes \xi'')$ от тензорного произведения двух одномерных расслоений ξ' и ξ'' . Без ограничения общности можно считать, что базой расслоений является пространство $\text{BU}(1) \times \text{BU}(1)$, а расслоения ξ' и ξ'' — это универсальные одномерные расслоения над сомножителями $\text{BU}(1)$. Пусть

$$f: \text{BU}(1) \times \text{BU}(1) \rightarrow \text{BU}(1)$$

— такое отображение, что $f^*(\xi_1) = \xi' \otimes \xi''$. Тогда

$$\begin{aligned} f^*(c_1) &= \alpha(c_1 \otimes 1) + \beta(1 \otimes c_1) \in H^2(\text{BU}(1) \times \text{BU}(1)) = \\ &= \{H^2(\text{BU}(1)) \otimes H^0(\text{BU}(1))\} \oplus \{H^0(\text{BU}(1)) \otimes H^2(\text{BU}(1))\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$c_1(\xi' \otimes \xi'') = \alpha c_1(\xi') + \beta c_1(\xi'').$$

Если $\xi' = 1$, то $\xi' \otimes \xi'' = \xi''$. Тогда $c_1(\xi'') = \alpha c_1(1) + \beta c_1(\xi'') = \beta c_1(\xi'')$, т.е. $\beta = 1$. Аналогично, $\alpha = 1$. Таким образом, для одномерных расслоений мы получаем простую формулу

$$c_1(\xi' \otimes \xi'') = c_1(\xi') + c_1(\xi''). \quad (33)$$

Применим формулу (33) к формуле (32):

$$\begin{aligned} \text{ch}(\xi \otimes \eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e^{c_1(\eta_i) + c_1(\eta_{n+j})} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e^{c_1(\eta_i)} e^{c_1(\eta_{n+j})} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e^{c_1(\eta_i)} \right) \left(\sum_{j=1}^m e^{c_1(\eta_{n+j})} \right). \end{aligned}$$

Учитывая формулы (30) и (31), получаем окончательно

$$\text{ch}(\xi \otimes \eta) = \text{ch} \xi \text{ch} \eta.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Теорема 2 показывает, что характер Черна однозначно продолжается до гомоморфизма колец

$$\text{ch}: K(X) \rightarrow H^2*(X; \mathbb{Q}).$$

Дальнейшее изучение свойств векторных расслоений требует привлечения новых геометрических соображений, геометрических конструкций, связанных с расслоениями. Эта глава будет посвящена наиболее употребительным геометрическим конструкциям, которые встречаются в различных задачах и приводят в свою очередь к выявлению более глубоких свойств векторных расслоений. Это такие свойства, как периодичность Ботта — главный вычислительный инструмент в K -теории, — далее, линейные представления и когомологические операции в K -теории и, наконец, формула Атья — Зингера для вычисления индекса эллиптических операторов на компактных многообразиях. Но это уже предмет изложения следующей главы.

§ 1. Разностная конструкция

Рассмотрим векторное расслоение ξ над базой X . Допустим, что над замкнутым пространством $Y \subset X$ расслоение ξ тривиально. Это значит, что существует такая окрестность $U \supset Y$, что ограничение расслоения ξ на окрестность U изоморфно декартову произведению U на \mathbb{R}^n : $\xi|_U \approx U \times \mathbb{R}^n$. Ясно, что множество U может служить одной из карт атласа, причем без ограничения общности можно считать, что остальные карты атласа не пересекаются с множеством Y . Значит, все функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}$ определены в точках дополнения $X \setminus Y$. Поэтому эти же функции склейки можно использовать для определения векторного расслоения на факторпространстве X/Y , в котором множество Y стягивается в одну точку. Полученное таким образом расслоение η над пространством X/Y можно представлять себе как расслоение ξ , у которого все слои над подпространством Y отождествлены в один слой согласно изоморфизму $\xi|_Y \approx Y \times \mathbb{R}^n$. Это важное наблюдение можно естественным образом обобщить.

Рассмотрим пару конечных клеточных пространств (X, Y) и тройку (ξ_1, d, ξ_2) , где ξ_1 и ξ_2 — два расслоения над пространством X , а d — изоморфизм их ограничений на подпространство Y :

$$d: \xi_1|_Y \rightarrow \xi_2|_Y.$$

В случае, когда ξ_2 — тривиальное расслоение, мы находимся в описанной выше ситуации.

Рассмотрим множество всех троек (ξ_1, d, ξ_2) . Тройку (ξ_1, d, ξ_2) назовем *тривиальной*, если изоморфизм d можно продолжить до изоморфизма $d: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ над всей базой X . Если два изоморфизма $d_1, d_2: \xi_1|_Y \rightarrow \xi_2|_Y$ гомотопны в классе изоморфизмов, то тройки (ξ_1, d_1, ξ_2) и (ξ_1, d_2, ξ_2) называются *эквивалентными*. Если (η_1, h, η_2) — тривиальная тройка, то тройки (ξ_1, d, ξ_2) и $(\xi_1 \oplus \eta_1, d \oplus h, \xi_2 \oplus \eta_2)$ тоже считаются эквивалентными.

Обозначим через $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ множество классов попарно эквивалентных троек.

Т е о р е м а 1. Множество $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ является абелевой группой относительно операции прямой суммы троек. Группа $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ изоморфна группе $K^0(X, Y)$, причем изоморфизм $K^0(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ задается соответствием

$$[\xi] - [\bar{N}] \rightarrow (p^*\xi, d, \bar{N}),$$

где $p: X \rightarrow X/Y$ — естественная проекция, а $d: p^*\xi|Y \rightarrow \bar{N}$ — естественный изоморфизм на слой $\xi|[Y] \approx \bar{N}|[Y]$, $\dim \xi = N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, операция сложения в группе $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ задается соответствием

$$(\xi_1, d_1, \xi_2) + (\eta_1, d_2, \eta_2) = (\xi_1 \oplus \eta_1, d_1 \oplus d_2, \xi_2 \oplus \eta_2).$$

Ассоциативность операции очевидна. Нейтральным элементом является класс тривиальных троек. В самом деле, если (ξ_1, d, ξ_2) — тривиальная тройка, т.е. изоморфизм $d: \xi_1|Y \rightarrow \xi_2|Y$ продолжается до изоморфизма $\bar{d}: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ и изоморфизм d гомотопен изоморфизму $d': \xi_1|Y \rightarrow \xi_2|Y$, то изоморфизм d' тоже продолжается до изоморфизма $\bar{d}': \xi_1 \rightarrow \xi_2$. Чтобы доказать существование продолжения d' , предположим сначала, что ξ_1, ξ_2 — тривиальные расслоения, а $d, d': Y \rightarrow GL(n, R)$ — непрерывные отображения в группу $GL(n, R)$ обратимых матриц порядка n . Условие, что d и d' гомотопны, а d' — продолжение изоморфизма d , означает, что существует отображение

$$(Y \times I) \cup (X \times \{0\}) \xrightarrow{D} GL(n, R).$$

Поскольку пространство $(Y \times I) \times (X \times \{0\})$ является ретрактом пространства $X \times I$, то отображение D продолжается до отображения

$$\bar{D}: X \times I \rightarrow GL(n, R).$$

Это означает, что изоморфизм d' имеет продолжение \bar{d}' на всем пространстве X , причем изоморфизм \bar{d}' гомотопен изоморфизму \bar{d} в классе изоморфизмов.

В случае нетривиальных расслоений ξ_1, ξ_2 рассмотрим конечный атлас $\{U_\alpha\}$, на каждой карте U_α которого оба расслоения ξ_1 и ξ_2 тривиальны. Без ограничения общности можно считать, что расслоения ξ_1, ξ_2 тривиальны на замыканиях \bar{U}_α . Продолжение \bar{d}' строим по индукции. Если \bar{d}' построено на подпространстве $\bigcup_{\alpha \leq \beta} \bar{U}_\alpha \subset U$ вместе с гомотопией изоморфизму \bar{d} , то на карте $\bar{U}_{\beta+1}$ получаем два гомотопных изоморфизма

$$\bar{d}|(\bar{U}_{\beta+1} \cap (Y \cup \bigcup_{\alpha \leq \beta} \bar{U}_\alpha)) \text{ и } \bar{d}'|(\bar{U}_{\beta+1} \cap (Y \cup \bigcup_{\alpha \leq \beta} \bar{U}_\alpha)),$$

один из которых \bar{d} определен на всей карте $\bar{U}_{\beta+1}$. Поскольку на карте $\bar{U}_{\beta+1}$ оба расслоения тривиальны, то, как было доказано ранее, гомоморфизм $\bar{d}'|(\bar{U}_{\beta+1} \cap (Y \cup \bigcup_{\alpha \leq \beta} \bar{U}_\alpha))$ продолжается до некоторого изоморфизма

\bar{d}' на карте $\bar{U}_{\beta+1}$, гомотопного изоморфизму \bar{d} .

Таким образом, тройка (ξ_1, d, ξ_2) эквивалентна тривиальной, если существует такая тривиальная тройка (η_1, h, η_2) , что прямая сумма $(\xi_1 \oplus \eta_1, d \oplus h, \xi_2 \oplus \eta_2)$ является тривиальной тройкой.

Две тройки $(\xi_1, d, \xi_2), (\xi'_1, d', \xi'_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие тривиальные тройки (η_1, h, η_2) и (η'_1, h', η'_2) , что расслоения $\xi_1 \oplus \eta_1$ и $\xi'_1 \oplus \eta'_1$ изоморфны, расслоения $\xi_2 \oplus \eta_2$

и $\xi'_2 \oplus \eta'_2$ изоморфны, а изоморфизмы $d \oplus h$ и $d' \oplus h'$ гомотопны. Поэтому, если тройка (η_1, h, η_2) тривиальна, то тройки (ξ_1, d, ξ_2) , $(\xi_1 \oplus \eta_1, d \oplus h, \xi_2 \oplus \eta_2)$ эквивалентны. Следовательно, тривиальная тройка определяет нейтральный элемент в множестве $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$.

Покажем, что тройка $(\xi_1 \oplus \xi_2, d \oplus d^{-1}, \xi_2 \oplus \xi_1)$ эквивалентна тривиальной, где $d: \xi_1|Y \rightarrow \xi_2|Y$ — произвольный изоморфизм. Рассмотрим гомотопию

$$D_t = \begin{pmatrix} \varphi \sin t & \cos t \\ -\cos t & d^{-1} \sin t \end{pmatrix} : (\xi_1 \oplus \xi_2)|Y \rightarrow (\xi_2 \oplus \xi_1)|Y.$$

При любом t гомоморфизм D_t является изоморфизмом. Поэтому изоморфизмы, задаваемые матрицами

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

гомотопны. Последний же изоморфизм продолжается до изоморфизма расслоений $\xi_1 \oplus \xi_2$ и $\xi_2 \oplus \xi_1$ над всем пространством X .

Таким образом, множество $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$ является группой относительно операции прямой суммы. Рассмотрим отображение $\alpha: K^0(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$, которое зададим следующим образом. Пусть $u \in K^0(X, Y)$ — произвольный элемент. Элемент u можно представить в виде разности $[\xi] - [\bar{N}]$, где ξ — расслоение над пространством $X|Y$, а \bar{N} — тривиальное N -мерное расслоение, $N = \dim \xi$. Рассмотрим прообраз $\eta = p^*(\xi)$ расслоения ξ при проекции $p: X \rightarrow X/Y$. Пусть $f: \eta \rightarrow \xi$ — каноническое отображение тотальных пространств, которое слой η_x в точке x изоморфно отображает в слой ξ_y , $y = p(x)$. Тогда ограничение $f|Y$ отображает расслоение $\eta|Y$ в один слой $\xi|_Y = \mathbb{R}^N$. Обозначим через $d: \eta|Y = \bar{N}|Y = Y \times \mathbb{R}^N$ изоморфизм, определяемый формулой

$$d(h) = (y, f(h)), \quad h \in \eta_y, \quad y \in Y.$$

Построенная тройка (η, d, \bar{N}) задает элемент группы $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$, который мы и обозначим через $\alpha(u)$. Если $[\xi'] - [\bar{N}'] = [\xi] - [\bar{N}]$, то $\xi' \oplus \bar{N} = \xi \oplus \bar{N}'$. Поэтому $u = [\xi'] - [\bar{N}'] = [\xi' \oplus \bar{N}] - [\bar{N} \oplus \bar{N}'] = [\xi \oplus \bar{N}'] - [\bar{N} \oplus \bar{N}']$. Элемент $\alpha(u)$ строится по представлению элемента u в виде разности таким образом, что если разности $[\xi] - [\bar{N}]$ соответствует тройка (η, d, \bar{N}) , то разности $[\xi \oplus \bar{N}'] - [\bar{N} \oplus \bar{N}']$ соответствует тройка $(\eta \oplus \bar{N}', d \oplus 1, \bar{N} \oplus \bar{N}')$, эквивалентная тройке (η, d, \bar{N}) . Значит, определение отображения α корректно.

Легко проверяется аддитивность отображения α .

Пусть теперь $u = [\xi] - [\bar{N}]$ и $\alpha(u) = 0$. Это значит, что тройка (η, d, \bar{N}) , построенная по разности $[\xi] - [\bar{N}]$, эквивалентна тривиальной тройке. Тогда существует такая тривиальная тройка (η_1, h, η_2) , что прямая сумма $(\eta \oplus \eta_1, d \oplus h, \bar{N} \oplus \eta_2)$ является тривиальной тройкой. Изоморфизмы h и $d \oplus h$ продолжаются до изоморфизмов расслоений над всем пространством X . В частности, это означает, что расслоения η_1 и η_2 изоморфны. Пусть ζ — такое расслоение, что $\eta_1 \oplus \zeta$ является тривиальным расслоением \bar{N}' : $\eta_1 \oplus \zeta = \bar{N}'$. Тогда и $\eta_2 \oplus \zeta = \bar{N}'$. Тройка $(\zeta, 1, \zeta)$ тривиальна. Поэтому тройки $(\eta_1 \oplus \zeta, h \oplus 1, \eta_2 \oplus \zeta)$ и $(\eta \oplus \eta_1 \oplus \zeta, d \oplus h \oplus 1, \bar{N} \oplus \eta_2 \oplus \zeta)$ тоже тривиальны. Поскольку расслоения $\eta_1 \oplus \zeta$ и $\eta_2 \oplus \zeta$ изоморфны тривиальным расслоениям, то тройка $(\eta_1 \oplus \zeta, h \oplus 1, \eta_2 \oplus \zeta)$ изоморфна тройке $(\bar{N}', 1, \bar{N}')$, а тройка $(\eta \oplus \eta_1 \oplus \zeta, d \oplus h \oplus 1, \bar{N} \oplus \eta_2 \oplus \zeta)$ изоморфна тройке

$(\eta \oplus \bar{N}', d \oplus 1, \bar{N} \oplus \bar{N}')$, которая, следовательно, тоже тривиальна. Тройка $(\eta \oplus \bar{N}', d \oplus 1, \bar{N} \oplus \bar{N}')$ согласно конструкции гомоморфизма α строится по разности $[\xi \oplus \bar{N}'] - [\bar{N} \oplus \bar{N}'] = u$. Поскольку изоморфизм $d \oplus 1$ продолжается до изоморфизма d расслоений над всем пространством X , то изоморфизм d индуцирует изоморфизм расслоений $\xi \oplus \bar{N}'$ и $\bar{N} \oplus \bar{N}'$ над пространством X/Y . Это значит, что $u = 0$. Таким образом, мы доказали, что гомоморфизм α является мономорфизмом.

Пусть (ξ_1, d, ξ_2) — тройка, представляющая произвольный элемент группы $\mathcal{H}^{(2)}(X, Y)$. Пусть η — такое расслоение над пространством X , что $\xi_2 \oplus \eta = N$ — тривиальное расслоение. Тогда тройка $(\eta, 1, \eta)$ тривиальна, а тройки (ξ_1, d, ξ_2) и $(\xi_1 \oplus \eta, d \oplus 1, N)$ эквивалентны. Это значит, что расслоение $\xi_1 \oplus \eta$ тривиально над пространством Y , причем существует такое расслоение ζ над факторпространством X/Y , что $p^*(\zeta) = \xi_1 \oplus \eta$. Значит, если $u = [\zeta] - [N]$, то $\alpha(u) = (\xi_1, d, \xi_2)$. Таким образом, доказано, что гомоморфизм α является эпиморфизмом, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Тройки (ξ_1, d, ξ_2) , участвующие в определении группы $\mathcal{H}^{(2)}(X, Y)$, удобно представлять следующим образом. Рассмотрим изоморфизм $d: \xi_1|_Y \rightarrow \xi_2|_Y$. Существует продолжение $\bar{d}: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ изоморфизма d , однако гомоморфизм \bar{d} уже не обязан быть послойным изоморфизмом в точках $x \in X \setminus Y$. Дополним гомоморфизм \bar{d} до комплекса расслоений

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{\bar{d}} \xi_2 \rightarrow 0, \quad (1)$$

где через 0 обозначено векторное расслоение с нулевым слоем, т.е. слоем, состоящим из одной точки. Комплекс (1) в каждой точке $x \in X$ задает комплекс векторных пространств — слоев расслоений, причем, если точка x принадлежит подпространству Y , то комплекс векторных пространств является точным комплексом. Возникает естественное обобщение конструкции группы $\mathcal{H}^{(2)}(X, Y)$.

Рассмотрим комплекс расслоений

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \xi_2 \xrightarrow{d_2} \xi_3 \xrightarrow{d_3} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \xi_n \rightarrow 0, \quad (2)$$

удовлетворяющий условию: если $x \in Y$, то комплекс векторных пространств

$$0 \rightarrow \xi_{1x} \xrightarrow{d_1} \xi_{2x} \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \xi_{nx} \rightarrow 0 \quad (3)$$

является точным.

В множестве комплексов (2), удовлетворяющих условию (3), можно ввести операцию прямой суммы и отношение эквивалентности. Если задан еще один комплекс расслоений

$$0 \rightarrow \eta_1 \xrightarrow{d'_1} \eta_2 \xrightarrow{d'_2} \dots \xrightarrow{d'_{n-1}} \eta_n \rightarrow 0, \quad (4)$$

то прямой суммой комплексов (2) и (4) называется комплекс

$$0 \rightarrow (\xi_1 \oplus \eta_1) \xrightarrow{d_1 \oplus d'_1} (\xi_2 \oplus \eta_2) \xrightarrow{d_2 \oplus d'_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1} \oplus d'_{n-1}} (\xi_n \oplus \eta_n) \rightarrow 0. \quad (5)$$

Комплекс (2) называется *тривиальным*, если условие его точности (3) выполнено для всех точек $x \in X$. Два комплекса (2) и (4) будем считать *эквивалентными*, если после прибавления к комплексам (2) и (4) тривиальных комплексов расслоения с одинаковыми номерами становятся изоморфными, а гомоморфизмы с одинаковыми номерами — гомотопными, при условии, что гомотопии разрешаются только в классе

гомоморфизмов, которые удовлетворяют условию точности (3) в каждой точке $x \in Y$.

Комплекс расслоений

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \xi_k \xrightarrow{d_k} \xi_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow 0, \quad (6)$$

у которого отличны от нуля только два расслоения, будем называть элементарным.

Всякий тривиальный комплекс разлагается в прямую сумму тривиальных элементарных комплексов. В самом деле, поскольку тривиальный комплекс точен в каждой точке $x \in X$, то мы можем применить теорему 1 из § 4 главы 1 о разложении расслоений.

Всякий комплекс расслоений, удовлетворяющий условию точности (3) в каждой точке $x \in Y$, эквивалентен элементарному комплексу вида

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \xi_2 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0. \quad (7)$$

Докажем это утверждение. Рассмотрим комплекс (2) и прибавим к нему тривиальный элементарный комплекс

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{n-2} \xrightarrow{d'_{n-2}} \eta_{n-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad d'_{n-1} = 1. \quad (8)$$

Получим новый (эквивалентный) комплекс

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-4}} \xi_{n-3} \xrightarrow{d_{n-3}} \xi_{n-2} \oplus \eta_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2} \oplus d'_{n-2}} \\ \xrightarrow{d_{n-2} \oplus d'_{n-2}} \xi_{n-1} \oplus \eta_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \xi_n \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Гомоморфизм d_{n-1} является эпиморфизмом слоев над точкой $x \in Y$. Следовательно, существует окрестность $U \supset Y$, для которой гомоморфизм d_{n-1} остается эпиморфизмом слоев над точкой $x \in U$. Выберем расслоение η_{n-1} тривиальным и достаточно большой размерности, чтобы существовал эпиморфизм

$$f: \eta_{n-1} \rightarrow \xi_n. \quad (10)$$

Пусть φ — определенная на X непрерывная функция, равная 1 на $X \setminus U$ и нулю на подпространстве Y , $0 \leq \varphi \leq 1$, а φ' — функция, равная 1 на подпространстве Y и такая, что $\varphi\varphi' \equiv 0$. Положим

$$D_k = d_k, \quad 1 \leq k \leq n-3,$$

$$D_{n-2} = \begin{pmatrix} d_{n-2} & 0 \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}, \quad D_{n-1} = \| d_{n-1} \quad \varphi f \|.$$

Для точек $x \in Y$ гомоморфизмы D_k совпадают с гомоморфизмами комплекса (9). Поэтому комплекс

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{D_1} \xi_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{n-4}} \xi_{n-3} \xrightarrow{D_{n-3}} \xi_{n-2} \oplus \eta_{n-2} \xrightarrow{D_{n-2}} \\ \xrightarrow{D_{n-2}} \xi_{n-1} \oplus \eta_{n-1} \xrightarrow{D_{n-1}} \xi_n \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

эквивалентен комплексу (9), поскольку соответствующие гомоморфизмы комплексов (9) и (11) гомотопны.

Таким образом, заменяя исходный комплекс на эквивалентный, мы можем считать, что гомоморфизм d_{n-1} является эпиморфизмом для

всех точек $x \in X$. Это означает, что комплекс (2) эквивалентен комплексу

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \xi_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-3}} \xi_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \xi_{n-1} \oplus \eta_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \xi_n \rightarrow 0, \quad (12)$$

причем $d_{n-2} = \begin{pmatrix} d'_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Значит, комплекс (12) эквивалентен прямой сумме комплекса

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \xi_2 \xrightarrow{d_2} \dots \rightarrow \xi_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \xi_{n-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad (13)$$

и тривиального элементарного комплекса

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \eta_{n-1} \xrightarrow{1} \xi_n \rightarrow 0. \quad (14)$$

Следовательно, всякий комплекс вида (2) эквивалентен комплексу вида (13). Отсюда по индукции следует, что всякий комплекс вида (2) эквивалентен комплексу вида (7).

Допустим, что элементарный комплекс вида (7) эквивалентен тривиальному. Согласно определению это значит, что существует такой тривиальный комплекс

$$0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_n \rightarrow 0, \quad (15)$$

что в прямой сумме

$$0 \rightarrow \eta_1 \oplus \xi_1 \rightarrow \eta_2 \oplus \xi_2 \rightarrow \eta_3 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_n \rightarrow 0 \quad (16)$$

можно произвести гомотопию таким образом, что в результате гомоморфизмы образуют точный комплекс во всех точках $x \in X$. Другими словами, гомотопия определяет комплекс

$$0 \rightarrow \zeta_1 \xrightarrow{D_1} \zeta_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{n-1}} \zeta_n \rightarrow 0 \quad (17)$$

расслоений на декартовом произведении $X \times I$, причем ограничение комплекса (17) на подпространство $X \times \{0\}$ совпадает с комплексом (16), а на подпространстве $(X \times \{1\}) \cup (Y \times I)$ комплекс (17) точен. Если все расслоения ζ_1, \dots, ζ_n тривиальны, то гомоморфизмы D_1, \dots, D_{n-1} задаются как такие матричнозначные функции $D_k(x)$, $x \in X \times I$, что $D_k(x) D_{k-1}(x) \equiv 0$. Поскольку пространство $(X \times \{1\}) \cup (Y \times I)$ является деформационным ретрактом пространства $X \times I$, существуют гомоморфизмы $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_{n-1}$, удовлетворяющие условиям:

а) $\bar{D}_k(x) \equiv D_k(x)$ при $x \in (X \times \{1\}) \cup (Y \times Y)$;

б) комплекс

$$0 \rightarrow \zeta_1 \xrightarrow{\bar{D}_1} \zeta_2 \xrightarrow{\bar{D}_2} \dots \xrightarrow{\bar{D}_{n-1}} \zeta_n \rightarrow 0 \quad (18)$$

является точным при всех $x \in X \times I$.

Очевидно, гомоморфизмы \bar{D}_k гомотопны гомоморфизмам D_k в классе гомоморфизмов, удовлетворяющих условиям точности (3) в точках $x \in (X \times \{1\}) \cup (Y \times I)$. Это значит, что в комплексе (16) можно так изменить гомоморфизмы вне некоторой окрестности пространства Y , чтобы комплекс (16) стал точным на всем пространстве X . Тогда комплекс (16) разлагается в прямую сумму точного комплекса

$$0 \rightarrow \eta_1 \oplus \xi_1 \xrightarrow{D_1} \eta_2 \oplus \xi_2 \xrightarrow{D_2} \eta'_3 \rightarrow 0 \quad (19)$$

и элементарных тривиальных комплексов. Рассмотрим новый комплекс

$$0 \rightarrow \eta_1 \oplus \xi_1 \oplus \zeta_1 \xrightarrow{H_1} \eta_2 \oplus \xi_2 \oplus \zeta_2 \xrightarrow{H_2} \eta'_3 \rightarrow 0, \quad (20)$$

гомоморфизмы H_1 и H_2 которого задаются формулами

$$H_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть φ — такая функция, что $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ на множестве $X \setminus U$, $\varphi \equiv 0$ на множестве Y . Рассмотрим гомоморфизмы

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} D_1 & -\varphi f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} D_2 & \varphi \end{pmatrix},$$

где $f: \eta'_3 \rightarrow \eta_2 \oplus \xi_2$ — гомоморфизм, обратный к гомоморфизму D_2 . Комплекс

$$0 \rightarrow \eta_1 \oplus \xi_1 \oplus \zeta_1 \xrightarrow{\tilde{H}_1} \eta_2 \oplus \xi_2 \oplus \zeta_2 \xrightarrow{\tilde{H}_2} \eta'_3 \rightarrow 0, \quad (21)$$

образованный гомоморфизмами \tilde{H}_1 и \tilde{H}_2 , тоже является точным. При этом комплексы (20) и (21) имеют гомоморфизмы, совпадающие в окрестности U и гомотопные на всем пространстве X .

Пусть расслоение $\eta_2 \oplus \xi_2 \oplus \zeta_2$ разложено в прямую сумму образа $\text{Im } \tilde{H}_1 = \text{Ker } \tilde{H}_2$ и ортогонального дополнения $(\text{Im } \tilde{H}_1)^\perp$. Покажем, что в каждой точке $x \in X$ слои подрасслоений ξ_2 и $(\text{Im } \tilde{H}_1)^\perp$ не пересекаются. В самом деле, если $x \in U$, то гомоморфизм D_2 в комплексе (19) имеет вид $\begin{pmatrix} D_2 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. слой расслоения ξ_2 лежит в ядре гомоморфизма D_2 . Значит, в точках $x \in X$, где $\varphi(x) = 0$, слой расслоения ξ_2 лежит в ядре гомоморфизма \tilde{H}_2 . Пусть теперь гомоморфизм $F: \eta'_3 \rightarrow \eta_2 \oplus \xi_2 \oplus \zeta_2$, задаваемый матрицей $F = \begin{pmatrix} f \\ R \end{pmatrix}$, таков, что образ $\text{Im } F$ ортогонален образу $\text{Im } \tilde{H}_1$.

Тогда $\tilde{H}_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \perp F(x)$, или $\begin{pmatrix} D_1 u - \varphi f(v) \\ v \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} f(y) \\ R(y) \end{pmatrix}$, или $-\varphi \langle f(v), f(x) \rangle + \langle v, R(x) \rangle \equiv 0$ для всех $x \in \eta'_3$, $v \in \zeta_1 = \zeta_2 = \eta'_3$. Значит, $R = \varphi f^* f$. Поскольку отображение f является мономорфизмом, то при $\varphi(x) \neq 0$ получаем, что отображение R тоже является мономорфизмом. Следовательно, слой расслоения ξ_2 не пересекается со слоем расслоения $(\text{Im } \tilde{H}_1)^\perp$. Пусть $p: \eta_2 \oplus \xi_2 \oplus \zeta_2 \rightarrow \text{Im } \tilde{H}_1$ — ортогональная проекция, ξ'_2 — образ расслоения ξ_2 при проекции p . Расслоение ξ'_2 изоморфно расслоению ξ_2 . Получаем, следовательно, изоморфизм $\tilde{H}_1: \eta_1 \oplus \xi_1 \oplus \zeta_1 \rightarrow \xi'_2 \oplus (\xi'_2)^\perp$ расслоений, ограничение которого на множество Y разлагается в прямую сумму двух изоморфизмов

$$d_1: \xi_1 \rightarrow \xi'_2 \quad (22)$$

и

$$\tilde{H}_1: (\eta_1 \oplus \zeta_1) \rightarrow (\xi'_2)^\perp, \quad (23)$$

причем изоморфизм (23) продолжается до изоморфизма на все пространство X . Это значит, что тройка (ξ_1, d_1, ξ_2) определяет нулевой элемент группы $\mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$.

Обозначим через $\mathcal{K}^{(n)}(X, Y)$ множество классов эквивалентных комплексов вида (2), удовлетворяющих условиям точности (3).

Нами, таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Естественное вложение

$$\mathcal{K}^{(2)}(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}^{(n)}(X, Y)$$

является взаимно однозначным соответствием.

С помощью теорем 1 и 2 можно дать удобные интерпретации описания K -групп для различных важных примеров пространств.

Представление элементов группы $K^0(X/Y)$ в виде троек или комплексов (2) называется *разностной конструкцией*, поскольку ограничение тройки (ξ_1, d, ξ_2) на пространство X равно $[\xi_1] - [\xi_2]$, а ограничение комплекса (2) на пространство X равно альтернированной сумме $[\xi_1] - [\xi_2] + \dots + (-1)^{n+1}[\xi_n]$.

Примеры. 1. Опишем группу $K^0(S^n)$. Сферу S^n можно представить как факторпространство диска D^n по его границе $\partial D^n = S^{n-1}$, $S^n = D^n/S^{n-1}$. Поэтому $K^0(S^n) = \mathcal{K}^{(2)}(D^n, \partial D^n)$. Поскольку расслоение над диском D^n тривиально, то любой элемент группы $\mathcal{K}^{(2)}(D^n, \partial D^n)$ определяется гомотопическим классом матричнозначной функции

$$d: \partial D^n = S^{n-1} \rightarrow GL(N, \mathbb{C}).$$

Следовательно, $K^0(S^n) = \pi_{n-1}(GL(N, \mathbb{C})) = \pi_{n-1}(U(N))$. В частности, $K^0(S^2) = \pi_1(U(N)) = \pi_1(U(1)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Тогда $K(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Далее, $K^0(S^3) = \pi_2(U(N)) = \pi_2(U(1)) = 0$. Следовательно, $K(S^3) = \mathbb{Z}$.

2. Пусть SX — надстройка над пространством X , т.е. факторпространство конуса CX по его основанию, $SX = CX/X$. Тогда $K^0(SX) = \mathcal{K}^{(2)}(CX, X) = [X, U(N)]$, где $[X, U(N)]$ — группа гомотопических классов отображений пространства X в унитарную группу $U(N)$ при достаточно большом N .

3. Обобщим теперь разностную конструкцию. Вместо тройки (ξ_1, d, ξ_2) будем рассматривать два комплекса вида (2) и отображение одного комплекса в другой:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \xi_1 & \xrightarrow{d_{11}} & \xi_2 & \xrightarrow{d_{12}} & \dots \xrightarrow{d_{1,n-1}} \xi_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_1 & & \downarrow d'_2 & & \downarrow d'_n \\ 0 & \longrightarrow & \eta_1 & \xrightarrow{d_{21}} & \eta_2 & \xrightarrow{d_{22}} & \dots \xrightarrow{d_{2,n-1}} \eta_n \longrightarrow 0 \end{array} \quad (24)$$

Пусть каждый горизонтальный комплекс будет точен на множестве $Y \subset X$. Оба эти комплекса играют роль расслоений на пространстве X/Y . От гомоморфизмов d'_k потребуем точность на подмножестве $Y' \subset X$. В точках $x \in Y$ комплексы (ξ_i, d_{1i}) и (η_i, d_{2i}) точны и определяют нулевые элементы в группе $K(Y)$. Поэтому любой набор гомоморфизмов d'_k можно понимать как изоморфизм между этими двумя комплексами. Естественнo ожидать, что диаграмма (24) задает элемент из группы $K^0(X/(Y \cup Y'))$. В самом деле, по диаграмме (24) как по биградуированному комплексу строится новый комплекс

$$0 \rightarrow \xi_1 \rightarrow (\xi_2 \oplus \eta_1) \rightarrow (\xi_3 \oplus \eta_2) \rightarrow \dots \rightarrow (\xi_n \oplus \eta_{n-1}) \rightarrow \eta_n \rightarrow 0, \quad (25)$$

гомоморфизмы в котором задаются матрицами

$$\left\| \begin{array}{cc} d_{1k} & 0 \\ d'_k & d_{2(k-1)} \end{array} \right\|.$$

Комплекс (25) точен во всех точках объединения $Y \cup Y'$ и, значит, определяет элемент группы $\mathcal{K}^{(n)}(X, Y \cup Y')$.

Более общо, пусть задана диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \xi_{11} & \xrightarrow{d_{11}} & \xi_{12} & \xrightarrow{d_{12}} & \dots & \xrightarrow{\quad} \xi_{1n} \rightarrow 0 \\
 & \downarrow d'_{11} & & \downarrow d'_{12} & & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & \xi_{21} & \xrightarrow{d_{21}} & \xi_{22} & \xrightarrow{d_{22}} & \dots & \xrightarrow{\quad} \xi_{2n} \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots & & & \downarrow \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 0 \rightarrow & \xi_{m1} & \xrightarrow{d_{m1}} & \xi_{m2} & \xrightarrow{d_{m2}} & \dots & \xrightarrow{\quad} \xi_{mn} \rightarrow 0 \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & & \downarrow 0
 \end{array} \quad (26)$$

в которой каждый квадрат антикоммутирует, т.е. $d'_{k,l+1}d_{kl} + d_{k+1,l}d'_{kl} = 0$, причем горизонтальные строки точны на подмножестве Y , а вертикальные столбцы точны на подмножестве Y' . Тогда диаграмма задает элемент группы $K^0(X, Y \cup Y')$ с помощью комплекса

$$0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{n+m} \rightarrow 0, \quad (27)$$

где $\eta_k = \bigoplus_{\alpha+\beta=k} \xi_{\alpha\beta}$.

В частности, используя представление элементов K -групп в виде диаграмм (26), можно естественным образом строить тензорное произведение в K -группах как билинейную функцию $K^0(X, Y) \times K^0(X, Y') \rightarrow K(X, Y \cup Y')$. В самом деле, пусть

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d_1} \xi_2 \xrightarrow{d_2} \dots \rightarrow \xi_n \rightarrow 0 \quad (28)$$

— комплекс, точный на подмножестве Y , а комплекс

$$0 \rightarrow \eta_1 \xrightarrow{d'_1} \eta_2 \xrightarrow{d'_2} \dots \rightarrow \eta_n \rightarrow 0 \quad (29)$$

точен на подмножестве Y' . Рассмотрим диаграмму вида (26), полученную тензорным произведением комплексов (28) и (29), т.е. положим

$$\xi_{kl} = \xi_k \otimes \eta_l, \quad (30)$$

$$d_{kl} = d_k \otimes 1, \quad (31)$$

$$d'_{kl} = (-1)^l \otimes d'_l. \quad (32)$$

Нетрудно проверить, что диаграмма (26), задаваемая формулами (30) — (32), имеет точные столбцы на подмножестве Y и точные строки на подмножестве Y' , т.е. определяет элемент группы $K^0(X, Y \cup Y')$.

4. Рассмотрим комплексное n -мерное векторное расслоение ξ над базой X . Пусть $p: E \rightarrow X$ — проекция его тотального пространства на базу X . Над пространством E как над новой базой рассмотрим комплекс расслоений

$$0 \rightarrow \Lambda_0 \eta \xrightarrow{d_0} \Lambda_1 \eta \xrightarrow{d_1} \Lambda_2 \eta \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda_n \eta \rightarrow 0, \quad (33)$$

где $\eta = p^* \xi$ — прообраз расслоения ξ , а гомоморфизм $d_k: \Lambda_k \eta \rightarrow \Lambda_{k+1} \eta$

в каждой точке $y \in E$, $y \in \xi_x$, $x = p(y)$, определяется как внешнее умножение на вектор $y \in \xi_x$, если считать, что слой $(\Lambda_k \eta)_y$ изоморфен пространству $\Lambda_k(\xi_x)$, а слой $(\Lambda_{k+1} \eta)_y$ изоморфен пространству $\Lambda_{k+1}(\xi_x)$. Как известно, если вектор $y \in \xi_x$ не равен нулю, $y \neq 0$, то комплекс (33) точен в точке y . Следовательно, комплекс (34) удовлетворяет условию точности (3) во всех точках тотального пространства E , за исключением точек нулевого сечения. Обозначим через $D(\xi)$ подпространство, являющееся объединением дисков единичного радиуса, а через $S(\xi)$ — подпространство, являющееся объединением сфер единичного радиуса, лежащих в тотальном пространстве E . Тогда комплекс (33) задает элемент из группы $K^0(D(\xi), S(\xi))$. Обозначим этот элемент через $\beta(\xi) \in K^0(D(\xi), S(\xi))$. Поскольку пространство $D(\xi)$ гомотопически эквивалентно базе X , $K(X) = K^0(X, \phi) = K^0(D(\xi), \phi)$. Следовательно, тензорное умножение на элемент $\beta(\xi)$ определяет гомоморфизм

$$K(X) \xrightarrow{\beta} K^0(D(\xi), S(\xi)). \quad (34)$$

Гомоморфизм (34) называется *гомоморфизмом Ботта*. В следующем параграфе мы докажем, что гомоморфизм Ботта является изоморфизмом.

В частности, если X — одноточечное пространство, а $\dim \xi = 1$, то $D(\xi)$ — это двумерный диск, а элемент $\beta \in K^0(D^2, S^1) = K^0(S^0) = \mathbb{Z}$ является образующим элементом группы $K^0(S^2)$ и называется *элементом Ботта*.

5. Существует простой способ сокращения комплекса расслоений (2), определяющего элемент группы $K^0(X, Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $n = 2m$. Положим

$$\eta_0 = \xi_1 \oplus \xi_3 \oplus \dots = \bigoplus_{k=1}^m \xi_{2k-1}, \quad (35)$$

$$\eta_1 = \xi_2 \oplus \xi_4 \oplus \dots = \bigoplus_{k=1}^m \xi_{2k}, \quad (36)$$

$$D = \left\| \begin{array}{cccc} d_1 & d_2^* & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & d_4^* & \\ 0 & 0 & d_5 & \ddots \\ & & \ddots & d_{2m-2}^* \\ & & & d_{2m-1} \end{array} \right\|. \quad (37)$$

Прежде всего заметим, что из расслоений η_0 и η_1 можно построить последовательность

$$\dots \rightarrow \eta_0 \xrightarrow{D_0} \eta_1 \xrightarrow{D_1} \eta_0 \xrightarrow{D_0} \dots, \quad (38)$$

точную на пространстве Y , где

$$D_0 = \left\| \begin{array}{ccc} d_1 & & 0 \\ & d_3 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_{2m-1} \end{array} \right\|, \quad D_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ d_2 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & d_{2m-2} & 0 \end{array} \right\|.$$

В самом деле, если $u = (u_1, u_3, \dots, u_{2m-1}) \in (\eta_0)_x$ — вектор из слоя расслоения η_0 и $D_0(u) = 0$, то $d_k(u_k) = 0$ для $k = 1, 3, \dots, 2m-1$. В силу точности комплекса (3) найдутся такие элементы $u_{2k} \in \xi_{2k}$, что $u_1 = 0$,

$u_{2k+1} = d_{2k}(u_{2k})$, т.е. $u = D_1(v)$, $v = (u_2, \dots, u_{2m-2}, 0)$. Аналогично, если $D_1(v) = 0$, то найдется такой вектор u , что $u = D_0(u)$. Тогда $D = D_0 + D_1^*$. Пусть $D(u) = 0$. Это означает, что $D_0(u) + D_1^*(u) = 0$. Тогда

$$0 = (D_0^* + D_1)(D_0 + D_1^*)u = (D_0^*D_0 + D_1D_1^*)u.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= ((D_0^*D_0 + D_1D_1^*)u, u) = (D_0^*D_0u, u) + (D_1D_1^*u, u) = \\ &= (D_0u, D_0u) + (D_1^*u, D_1^*u), \end{aligned}$$

т.е. $D_0u = D_1^*u = 0$. Следовательно, в силу точности комплекса (38) $u = D_1v$ для некоторого вектора $v \in (\eta_1)_x$. Значит,

$$0 = (D_1^*u, v) = (u, D_1v) = (u, u),$$

т.е. $u = 0$.

Покажем теперь, что D является эпиморфизмом. Пусть v — вектор, ортогональный образу $\text{Im} D$, т.е. $(v, Du) = 0$ для любого $u \in (\eta_0)_x$. Тогда $D^*v = 0$, т.е. $(D_0^* + D_1)v = 0$. Поэтому $0 = (D_0 + D_1^*)(D_0^* + D_1)v = (D_0D_0^* + D_1^*D_1)v = 0$. Значит, $0 = ((D_0D_0^* + D_1^*D_1)v, v) = (D_0^*v, D_0^*v) + (D_1v, D_1v)$, т.е. $D_0^*v = D_1v = 0$. Тогда в силу точности комплекса (38) $v = D_0u$. Следовательно, $(v, v) = (v, D_0u) = (D_0^*v, u) = 0$, т.е. $v = 0$. Итак, образ $\text{Im} D$ совпадает со всем слоем $(\eta_1)_x$.

Конструкция, задаваемая формулами (35) — (37), сопоставляет комплексу (2), удовлетворяющему условию точности (3), некоторую тройку. При этом тривиальному комплексу сопоставляется тривиальная тройка, а гомотопным комплексам сопоставляются гомотопные тройки. Наконец, если комплекс (2) имеет нетривиальными только расслоения ξ_1 и ξ_2 , т.е. по существу является тройкой, то ему сопоставляется сама эта тройка. Таким образом, формулы (35) — (37) задают гомоморфизм $\mathcal{K}^{(n)}(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}^{(2)}(X, Y)$, обратный к гомоморфизму из теоремы 2.

6. Задаваемое формулами (30) — (32) тензорное произведение троек

$$0 \rightarrow \xi_1 \xrightarrow{d} \xi_2 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \eta_1 \xrightarrow{d'} \eta_2 \rightarrow 0$$

согласно конструкции из предыдущего примера может быть представлено тройкой

$$0 \rightarrow (\xi_1 \otimes \eta_1) \oplus (\xi_2 \otimes \eta_2) \xrightarrow{D} (\xi_1 \otimes \eta_2) \oplus (\xi_2 \otimes \eta_1) \rightarrow 0, \quad (39)$$

где гомоморфизм D задается матрицей

$$D = \begin{vmatrix} d \otimes 1 & -1 \otimes d'^* \\ 1 \otimes d' & d^* \otimes 1 \end{vmatrix}. \quad (40)$$

§ 2. Периодичность Ботта

Как мы уже показали в предыдущем параграфе, элемент $\beta \in K^0(S^2)$, задаваемый в виде разностной конструкции (33) для тривиального расслоения над точкой, является образующим элементом в группе $K^0(S^2)$. Рассмотрим пространство $X \times S^2$. Проекции $X \times S^2 \rightarrow X$, $X \times S^2 \rightarrow S^2$ задают отображения $K(X) \rightarrow K(X \times S^2)$ и $K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$. Поскольку кольцо $K(S^2)$ изоморфно кольцу усеченных многочленов $\mathbb{Z}[\beta]/\{\beta^2 = 0\}$, гомоморфизм

$$h: K(X) \otimes \mathbb{Z}[t]/\{t^2 = 0\} = K(X)[t]/\{t^2 = 0\} \rightarrow K(X \times S^2) \quad (1)$$

задается формулой

$$h(xt + y) = x\beta + y.$$

Т е о р е м а 1 (периодичность Ботта). Гомоморфизм (1) является изоморфизмом колец $K(X \times S^2)$ и $K(X)[t]/\{t^2 = 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется доказать, что существует обратный к (1) гомоморфизм

$$K(X \times S^2) \rightarrow K(X)[t]/\{t^2 = 0\}. \quad (2)$$

Рассмотрим пару $(X \times S^2, X \times \{s_0\})$, где s_0 — отмеченная точка. Точная последовательность в K -теории имеет вид

$$K(SX) \xrightarrow{\delta} K(X \times S^2, X \times \{s_0\}) \xrightarrow{i^*} K(X \times S^2) \xrightarrow{i^*} K(X),$$

где $i: X \rightarrow X \times S^2$ — вложение множителя X в подпространство $X \times \{s_0\}$. Нетрудно усмотреть, что гомоморфизм i^* является эпиморфизмом, а значит, δ является нулевым гомоморфизмом. В самом деле, композиция вложения i и проекции $p: X \times S^2 \rightarrow X$ является тождественным отображением. Поэтому гомоморфизмы $i^*: K(X \times S^2) \rightarrow K(X)$, $i^*: K(S(X \times S^2)) \rightarrow K(SX)$ являются эпиморфизмами. Далее, гомоморфизм h в композиции с гомоморфизмом i^* сопоставляет многочлену $x + ty$ элемент x . Поэтому $h(ty) \in K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\})$. Таким образом, достаточно показать, что гомоморфизм $h: tK(X) \rightarrow K(X \times S^2, X \times \{s_0\})$ является изоморфизмом. Поэтому необходимо построить обратный гомоморфизм

$$K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\}) \rightarrow tK(X). \quad (3)$$

Группа $K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\})$ изоморфна группе $K^0(X \times D^2, X \times S^1)$, где D^2 — двумерный диск, а его граница S^1 — одномерная окружность. Поэтому всякий элемент группы $K^0(X \times D^2, X \times S^1)$ представляется разностной конструкцией посредством тройки (ξ_1, d, ξ_2) , где ξ_1, ξ_2 — векторные расслоения над $X \times D^2$, а d — изоморфизм этих расслоений над $X \times S^1$. Поскольку пространство $X \times D^2$ стягивается к пространству X , можно считать, что расслоения ξ_1, ξ_2 заданы над пространством X , а d — изоморфизм прообразов расслоений ξ_1, ξ_2 при проекции $X \times S^1 \rightarrow X$. Поскольку X — конечное клеточное пространство, можно считать, что расслоения ξ_1 и ξ_2 тривиальны. Значит, изоморфизм d можно задать в виде матрично-значной функции

$$d: X \times S^1 \rightarrow U(n) \quad (4)$$

для достаточно большого числа n . При этом следует иметь в виду, что тройки, эквивалентные тройке (ξ_1, d, ξ_2) , получаются в результате выполнения двух операций: композиции отображения d с вложением $U(n) \subset U(n + n')$ и гомотопии отображения d в классе отображений $X \times S^1 \rightarrow GL(C, n)$.

Итак, задана непрерывная матричнозначная функция

$$d(x, z) \in U(n), \quad x \in X, \quad z \in S^1.$$

Переменная z будет рассматриваться как комплексная переменная с условием $|z| = 1$.

П е р в ы й ш а г. Произведем ϵ -аппроксимацию функции $d(x, z)$ с помощью гладкой функции по формуле

$$d_1(x, z) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\varphi-\epsilon}^{\varphi+\epsilon} d(x, e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (5)$$

Второй шаг. Рассмотрим ряд Фурье функции (5) :

$$d_1(x, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x) z^k, \quad (6)$$

где

$$a_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(x, e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Ряд Фурье (6) сходится равномерно по переменным x и z и равностепенно в классе функций $d(x, z) \in U(n)$.

Третий шаг. Ограничимся конечным отрезком ряда Фурье

$$f_N(x, z) = \sum_{k=-N}^N a_k(x) z^k.$$

Номер N выберем настолько большим, чтобы

$$f_N(x, z) \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Четвертый шаг. Рассмотрим матричнозначный многочлен

$$p_N(x, z) = z^N f_N(x, z). \quad (7)$$

Пятый шаг. Если $p(x, z) = \sum_{k=0}^N b_k(x) z^k \in GL(n, \mathbb{C})$ — матричнозначный многочлен, то положим

$$\mathcal{L}_N(p)(x, z) = \begin{pmatrix} b_0(x) & b_1(x) & \dots & b_{N-1}(x) & b_N(x) \\ -z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -z & 1 \end{pmatrix} \in GL(nN, \mathbb{C}). \quad (8)$$

Шестой шаг. Матричнозначная функция (8) уже линейно зависит от переменной z , т.е. представляется в виде

$$\mathcal{L}_N(p)(x, z) = A(x)z + B(x) \in GL(nN, \mathbb{C}). \quad (9)$$

Поэтому существует проектор $Q(x): \mathbb{C}^{nN} \rightarrow \mathbb{C}^{nN}$, коммутирующий с оператором $\mathcal{L}_N(p)(x, z)$ при любом значении переменной z , причем пространство \mathbb{C}^{nN} разлагается этим проектором на два подпространства $V_+ \oplus V_-$, удовлетворяющие условиям:

а) оператор $\mathcal{L}_N(p)(x, z): V_+ \rightarrow V_+$ является изоморфизмом при $|z| \geq 1$;

б) оператор $\mathcal{L}_N(p)(x, z): V_- \rightarrow V_-$ является изоморфизмом при $|z| \leq 1$.

Седьмой шаг. Согласно теореме § 5 главы 1 семейство проекторов $Q(x)$ задает разложение тривиального расслоения $X \times \mathbb{C}^{nN}$ в сумму двух расслоений $V_+(x) \oplus V_-(x)$. Положим

$$\nu_N(d) = (V_+(x) - \overline{nN})t. \quad (10)$$

Остается показать, что формула (10) определяет гомоморфизм (3), обратный к гомоморфизму $h: tK(X) \rightarrow K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\})$, определенному формулой $h(\xi) = \xi \otimes \beta$. Заметим, что построенная на первом шаге функция d_1 гомотопна функции d в указанном ранее классе функций, причем, если d и \tilde{d} — близкие функции, то и их ϵ -аппроксимации тоже близки в C^1 -норме. Поэтому конечные отрезки ряда Фурье $f_N(x, z)$ гомотопны функции d , а если d и \tilde{d} — близкие функции, то их конечные отрезки

ряда Фурье тоже близки. Переход к функции f_N на четвертом шаге соответствует тензорному умножению элемента $\xi = (\xi_1, d, \xi_2)$ на степень рас-
слоения Хопфа, т.е. на элемент $(\beta + 1)N$.

Матричнозначная функция (8) гомотопна функции вида

$$\begin{pmatrix} f_N(x, z) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка nN . Эта гомотопия задается с помощью разложения матрицы $\mathcal{L}_N(p)(x, z)$ в произведение

$$\mathcal{L}_N(p)(x, z) = \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_2 & \dots & q_N \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_N & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

При этом многочлены q_1, q_2, \dots, q_N однозначно восстанавливаются из соотношений (11). В самом деле, приравнивая левую и правую части соотношения (11), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} p_N(x, z) - zq_1(x, z) &= b_0(x), \\ q_1(x, z) - zq_2(x, z) &= b_1(x), \\ &\dots\dots\dots \\ q_{N-1}(x, z) - zq_n(x) &= b_{N-1}(x), \\ q_N(x) &= b_N(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Система (12), очевидно, совместна и имеет единственное решение.

В правой части соотношения (11) первый и третий сомножители являются матрицами, гомотопными единичной матрице. Отсюда и следует, что

функция $\mathcal{L}_{2N}(p_N)$ гомотопна матричнозначной функции $\begin{vmatrix} p_N & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix}$.

Заменим теперь функцию f_N на функцию f_{N+1} . Очевидно, что функции f_N и f_{N+1} гомотопны. На четвертом шаге многочлен $p_N = z^N f_N(x, z)$ заменится на многочлен $p_{N+1} = z^{N+1} f_{N+1}(x, z)$, который гомотопен многочлену zp_N . Матричнозначная функция $\mathcal{L}_{2N+2}(p_{N+1})$ гомотопна функции $\mathcal{L}_{2N+2}(zp_N)$. Функция $\mathcal{L}_{2N+2}(zp_N)$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{2N+2}(zp_N) = \begin{bmatrix} 0 & b_0(x) & b_1(x) & \dots & b_{2N}(x) & 0 \\ -z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & 1 \end{bmatrix}$$

и гомотопна прямой сумме $\mathcal{L}_{2N}(p_N) \oplus zE \oplus E$, где E — матрица n -го порядка. Следовательно, при разложении функции $\mathcal{L}_{2N}(p_N) \oplus zE \oplus E$ на шестом шаге на два слагаемых пространства V_+ и V_- увеличатся на прямые слагаемые \mathbb{C}^n . Таким образом,

$$\nu_{N+1}(d) = (V_+(x) + \bar{n} - \overline{n(N+1)})t = (V_+(x) - \overline{nN})t = \nu_N(d).$$

Значит, построение элемента $\nu_N(d)$ по формуле (9) не зависит от выбора числа N .

Пусть теперь тройка (ξ_1, d, ξ_2) представляет элемент $h(t\eta)$, $\eta \in K(X)$. Согласно определению элемент $h(t\eta)$ задается как тензорное произведение расслоения η над базой X и разностной конструкции β на паре (D^2, S^1) по формуле (33) из § 1. Элемент β задается тройкой $(\mathbb{C}^1, z, \mathbb{C}^1)$, где \mathbb{C}^1 — одномерное тривиальное расслоение над диском $D^2 \subset \mathbb{C}^1$, а z — линейная функция от комплексной переменной z . Тройка (ξ_1, d, ξ_2) имеет вид (η, d, η) , $d(x, z) \equiv z$. Пусть η_1 — обратное к η расслоение. Тогда прямая сумма $\eta \oplus \eta_1$ является тривиальным расслоением некоторой размерности n . Тройка $(\eta \oplus \eta_1, d \oplus 1, \eta \oplus \eta_1)$, очевидно, эквивалентна тройке (η, d, η) . Поэтому гомоморфизм $\tilde{d} = d \oplus 1$ задается в виде матрично-значной функции

$$\tilde{d}(x, z) = A(x)z + B(x), \quad (13)$$

линейно зависящей от переменной z . Следовательно, при построении элемента $\nu_N(\tilde{d})$ мы пропускаем первый, второй и третий шаги, считая, что функция (13) уже задает конечный отрезок ряда Фурье. Тогда в этом случае $N = 1$, $p_1(x, z) = B(x)z + A(x)z^2$, а

$$\mathcal{L}_2(p_1)(x, z) = \begin{vmatrix} 0 & B(x) & A(x) \\ -z & 1 & 0 \\ 0 & -z & 1 \end{vmatrix}.$$

Функция $\mathcal{L}_2(p_1)(x, z)$ гомотопна матричнозначной функции

$$\begin{vmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & B(x) & A(x) \\ 0 & -z & 1 \end{vmatrix},$$

которая в свою очередь гомотопна функции

$$\begin{vmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & A(x)z + B(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Значит, разложение пространства на два слагаемых $V_+(x) \oplus V_-(x)$ в соответствии с седьмым шагом согласовано с разложением расслоения $\eta \oplus \eta_1$, т.е. $V_+(x) = \eta \oplus \bar{n}$, $V_-(x) = \eta_1 \oplus \bar{n}$. По формуле (10) имеем

$$\nu_1(d) = (V_+(x) - \bar{n})t = \eta t,$$

или

$$\nu_1(h(t\eta)) = t\eta. \quad (14)$$

Обратно, пусть $\xi = (\xi_1, d, \xi_2)$ — произвольный элемент группы $K(X \times S^2, X \times \{s_0\})$. Первый, второй и третий шаги приводят к тройке (ξ_1, f_N, ξ_2) , эквивалентной тройке ξ . Четвертый шаг задает тройку $\zeta = (\xi_1, p_N, \xi_2)$, причем $\zeta = \eta^N \otimes \xi$, где η — расслоение Хопфа над сферой

S^2 , т.е. $\eta = 1 + \beta$, а β определяется формулой (33) из § 1. Пятый шаг определяет новую тройку

$$\xi_1 = (\xi_1 \oplus \overline{2nN}, \quad z^{-N} \mathcal{L}_{2N}(\rho_N), \quad \xi_2 \oplus \overline{2nN}),$$

эквивалентную элементу $\xi + (2nN)((1 + \beta)^{-N} - 1)$. Шестой и седьмой шаги задают два расстояния $V_+(x)$ и $V_-(x)$, причем

$$V_+(x) \oplus V_-(x) = \overline{n(2N + 1)},$$

$$\xi_1 = V_+(x)((1 + \beta)^{-N+1} - 1) \oplus V_-(x)((1 + \beta)^{-N} - 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi + (2nN)((1 + \beta)^{-N} + 1) &= V_+(x)((1 + \beta)^{-N+1} - 1) + \\ &+ (\overline{n(2N + 1)} - V_+(x))((1 + \beta)^{-N} + 1). \end{aligned}$$

Заметим, что $\beta^2 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \xi + 2nN(-N)\beta &= V_+(x)\beta + n(2N + 1)(-N)\beta, \\ \xi &= V_+(x)\beta - nN\beta. \end{aligned} \tag{15}$$

Следовательно,

$$h\nu_N(\xi) = h((V_+(x) - \overline{nN})t) = V_+(x)\beta - \overline{nN}\beta = \xi. \tag{16}$$

Формулы (14) и (16) показывают, что отображение ν_N , задаваемое формулой (10), обратно к отображению h . Теорема 1 полностью доказана.

§ 3. Периодическая K -теория

Используя периодичность Ботта, можно определить группы $K^n(X, Y)$ не только для отрицательных значений номеров n , но и для положительных.

Заметим сначала, что прямая сумма $\bigoplus_{n \leq 0} K^n(X, Y)$ снабжается кольце-

вой структурой, превращающей эту прямую сумму в градуированное кольцо. В самом деле, группа $K^{-n}(X, Y)$ — это группа $K^0(S^n X, S^n Y)$. Пространство $S^n X$ удобно представлять как факторпространство $(D^n \times X) / \{(S^{n-1} \times X) \cup (D^n \times x_0)\}$. Поэтому факторпространство $S^n X / S^n Y$ можно представить как факторпространство $(D^n \times X) / \{(S^{n-1} \times X) \cup (D^n \times Y)\}$. Значит, $K^0(S^n X, S^n Y) \approx K^0(D^n \times X, (S^{n-1} \times X) \cup (D^n \times Y))$.

Поэтому построенная в § 1 операция тензорного произведения разностных конструкций может быть применена и здесь. Декартовы произведения $D^n \times X$ и $D^m \times X$ будем считать вложенными в пространство $D^{n+m} \times X$. Тогда группы $K^0(S^n X, S^n Y)$ и $K^0(S^m X, S^m Y)$ изоморфны соответственно группам $K^0(D^{n+m} \times X, (D^m \times S^{n-1} \times X) \cup (D^{n+m} \times Y))$ и $K^0(D^{n+m} \times X, (S^{m-1} \times D^n \times X) \cup (D^{n+m} \times Y))$. Объединение $(D^m \times S^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times D^n)$ есть не что иное, как граница диска D^{n+m} , т.е. сфера S^{n+m-1} . Значит, формулы (30) — (32) из § 1 задают билинейное отображение

$$K^0(S^n X, S^n Y) \times K^0(S^m X, S^m Y) \rightarrow K^0(S^{n+m} X, S^{n+m} Y),$$

или, что то же самое, билинейное отображение

$$K^{-n}(X, Y) \times K^{-m}(X, Y) \rightarrow K^{-(n+m)}(X, Y). \tag{1}$$

Операция (1) превращает прямую сумму $\bigoplus_{n \leq 0} K^n(X, Y)$ в градуированное кольцо.

З а м е ч а н и е. Отображение (1) может быть обобщено на случай различных пар (X, Y) и (X', Y') . В этом случае получается билинейное отображение

$$K^{-n}(X, Y) \times K^{-m}(X', Y') \rightarrow K^{-(n+m)}(X \times X', (X \times Y') \cup (Y \times X')). \quad (2)$$

Это отображение тоже называется (внешним) тензорным умножением. Гомоморфизм (1) получается из гомоморфизма (2) в результате композиции с гомоморфизмом, индуцированным вложением $X \rightarrow X \times X$ пространства X в качестве диагонали. В частности, из гомоморфизма (2) получается билинейное отображение

$$K^{-n}(X, Y) \times K^{-m}(S^0, s_0) \rightarrow K^{-(n+m)}(X \times S^0, (X \times s_0) \cup (Y \times S^0)) = \\ = K^{-(n+m)}(X, Y), \quad (3)$$

где (S^0, s_0) — нульмерная сфера, т.е. пространство, состоящее из двух изолированных точек, а s_0 — одна из этих точек.

Операция тензорного умножения, задаваемая отображением (3), задает в группе $\bigoplus_{n \leq 0} K^n(X, Y)$ структуру градуированного модуля над градуированным кольцом $\bigoplus_{n \leq 0} K^n(S^0, s_0)$.

Согласно теореме предыдущего параграфа о периодичности Ботта операция тензорного умножения

$$K(X) \times K^0(S^2, s_0) \rightarrow K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\})$$

задает изоморфизм.

$$h: K(X) \rightarrow K^0(X \times S^2, X \times \{s_0\}) = K^0(X \times D^2, X \times S^1)$$

по формуле $h(\xi) = \xi \otimes \beta$, где $\beta \in K^0(S^2, s_0) = K^{-2}(S^0, s_0) = \mathbb{Z}$ — образующий элемент Ботта. Рассмотрим отмеченную точку $x_0 \in X$ и диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K(X, x_0) & \longrightarrow & K^0(X \times D^2, (X \times S^1) \cup (x_0 \times D^2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(X) & \longrightarrow & K^0(X \times D^2, X \times S^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(x_0) & \longrightarrow & K^0(x_0 \times D^2, x_0 \times S^1) \end{array}$$

В случае комплексных расслоений гомоморфизм $K^0(X \times D^2, X \times S^1) \rightarrow K^0(x_0 \times D^2, x_0 \times S^1)$ является эпиморфизмом, поэтому гомоморфизм

$$K^0(X, x_0) \rightarrow K^0(X \times D^2, (X \times S^1) \cup (x_0 \times D^2)) \quad (4)$$

является изоморфизмом и совпадает с умножением на элемент Ботта β в соответствии с отображением (3): $K^0(X, x_0) \times K^{-2}(S^0, s_0) \rightarrow K^{-2}(X, x_0)$. Из того, что отображение (4) является изоморфизмом, следует, что в билинейном отображении $K^0(X, Y) \times K^{-2}(S^0, s_0) \rightarrow K^{-2}(X, Y)$ умножение на элемент β тоже задает изоморфизм

$$K^0(X, Y) \xrightarrow{\otimes \beta} K^{-2}(X, Y). \quad (5)$$

В частности, получаем, что умножение на элемент β задает изоморфизм

$$K^{-n}(X, Y) \xrightarrow{\otimes \beta} K^{-n-2}(X, Y) \quad (6)$$

или, другими словами, что группы $K^{-n}(X, Y)$ и $K^{-n-2}(X, Y)$ изоморфны:

$$K^{-n}(X, Y) \approx K^{-n-2}(X, Y). \quad (7)$$

Собственно, формула (7) и оправдывает название "периодичность Ботта".

Кольцо $\bigoplus_{n \leq 0} K^n(S^0, s_0)$ изоморфно кольцу многочленов $Z[\beta]$, $\beta \in K^{-2}(S^0, s_0)$, с целыми коэффициентами.

В силу периодичности Ботта (7) для описания групп $K^n(X, Y)$ достаточно знать всего лишь две группы: $K^0(X, Y)$ и $K^{-1}(X, Y)$.

Группы $K^n(X, Y)$ удобно определять для любого целого индекса n , полагая $K^n(X, Y) = K^{n-2N}(X, Y)$. Можно также считать, что группы $K^n(X, Y)$ нумерованы не целыми числами, а вычетами по модулю два. Тогда точная последовательность для пары (X, Y) примет следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} \dots \leftarrow K^1(X, Y) \leftarrow K^0(Y, x_0) \leftarrow K^0(X, x_0) \leftarrow \\ \leftarrow K^0(X, Y) \leftarrow K^1(Y, x_0) \leftarrow K^1(X, x_0) \leftarrow \\ \leftarrow K^1(X, Y) \leftarrow K^0(Y, x_0) \leftarrow \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим через $K^*(X, Y)$ прямую сумму $K^0(X, Y) \oplus K^1(X, Y)$. Группа $K^*(X, Y)$ является кольцом, градуированным группой Z_2 . Для этой группы точная последовательность (8) примет следующий вид:

$$\dots \leftarrow K^*(X, Y) \xleftarrow{\partial} K^*(Y, x_0) \xleftarrow{i^*} K^*(X, x_0) \xleftarrow{j^*} K^*(X, Y) \leftarrow \dots \quad (9)$$

Гомоморфизмы i^* и j^* являются кольцевыми гомоморфизмами, а гомоморфизм ∂ сдвигает градуировку на единицу.

Рассмотрим характер Черна, построенный в § 6 предыдущей главы. Его можно представлять как кольцевой гомоморфизм градуированных колец:

$$\text{ch}: K^*(X, Y) \rightarrow H^{**}(X, Y; \mathbb{Q}), \quad (10)$$

причем кольцо $H^{**}(X, Y; \mathbb{Q})$ рассматривается как Z_2 -градуированное кольцо в разложении на прямую сумму четномерных и нечетномерных когомологий.

Т е о р е м а. Гомоморфизм

$$\text{ch}: K^*(X, Y) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{**}(X, Y; \mathbb{Q}) \quad (11)$$

является изоморфизмом для любой конечной клеточной пары (X, Y) .

Доказательство теоремы основано на лемме о пяти изоморфизмах и проводится индукцией по числу клеток пространства X . Пусть $X \supset X' \supset Y$ и $X \setminus X'$ состоит ровно из одной клетки. Тогда имеем следующую диаграмму из двух точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & K^*(X, X') \otimes \mathbb{Q} & \longleftarrow & K^*(X', Y) \otimes \mathbb{Q} & \longleftarrow & K^*(X, Y) \otimes \mathbb{Q} \longleftarrow \\ & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ \dots & \longleftarrow & H^{**}(X, X'; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^{**}(X', Y; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^{**}(X, Y; \mathbb{Q}) \longleftarrow \\ & & & & & & \\ & \longleftarrow & K^*(X, X') \otimes \mathbb{Q} & \longleftarrow & K^*(X', Y) \otimes \mathbb{Q} & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} & & \\ & \longleftarrow & H^{**}(X, X'; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^{**}(X', Y; \mathbb{Q}) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Четыре вертикальных гомоморфизма, кроме среднего, являются изоморфизмами по предположению индукции, поскольку пару (X, X') можно заменить на диск с границей, т.е. на одну клетку. Значит, средний вертикальный гомоморфизм является изоморфизмом. Остается проверить начальный шаг индукции, т.е. доказать, что гомоморфизм

$$\text{ch}: K^*(D^n, S^{n-1}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{**}(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Q}) \quad (12)$$

является изоморфизмом. Пусть $n = 2$. Тогда группа $K^0(D^2, S^1)$ равна группе \mathbb{Z} с образующей $\beta = [\xi] - 1$, где ξ — расслоение Хопфа. Имеет место равенство $\text{ch}\beta = \text{ch}\xi - 1 = e^{c_1} - 1 = c_1$, где $c_1 \in H^2(S^2, s_0; \mathbb{Q})$ — целочисленная образующая. Значит, гомоморфизм

$$\text{ch}: K^0(D^2, S^1) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{**}(D^2, S^1; \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом. Далее, $K^1(D^2, S^1) = 0$, нечетные же кохомологии пары (D^2, S^1) тоже равны нулю. Таким образом, характер Черна является изоморфизмом при $n = 2$. Это значит, что кольцевой гомоморфизм $\text{ch}: K^*(S^0, s_0) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{**}(S^0, s_0; \mathbb{Q})$ является изоморфизмом. Поскольку

$$K^s(D^n, S^{n-1}) = K^{s-n}(S^0, s_0), \quad H^s(D^n, S^{n-1}) = H^{s-n}(S^0, s_0),$$

то гомоморфизм (12) является изоморфизмом при любом n . Теорема полностью доказана.

Из теоремы, в частности, вытекает, что для любого класса кохомологий $x \in H^{2k}(X)$ найдется такое расслоение $[\xi]$, что первая нетривиальная однородная компонента ненулевой размерности характера Черна расслоения ξ будет кратна x , т.е.

$$\text{ch} \xi = \dim \xi + \lambda x + \text{члены большей размерности}, \quad \lambda \neq 0.$$

§ 4. Линейные представления и расслоения

Всякое линейное представление группы G в векторном (комплексном) n -мерном пространстве задается гомоморфизмом $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ($\text{GL}(n, \mathbb{C})$). Поэтому, если задано главное G -расслоение ξ над пространством X , то, заменяя функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ расслоения ξ на их композицию с представлением ρ , мы получаем функции склейки $\rho \circ \psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ нового расслоения ξ^ρ со слоем \mathbb{R}^n , которое уже является векторным расслоением.

Пусть ξ_G — универсальное G -расслоение над классифицирующим пространством B_G . Обозначим через $R(G)$ группу виртуальных линейных конечномерных представлений*) группы G . Группа $R(G)$ является кольцом относительно операции тензорного произведения представлений. Каждому представлению ρ сопоставляем векторное расслоение ξ_G^ρ . Это сопоставление порождает кольцевой гомоморфизм

$$b: R(G) \rightarrow K(BG). \quad (1)$$

Интерес к отображениям (1) связан с различными вопросами. Виртуальное расслоение $b(\rho) = [\xi_G^\rho]$ является инвариантом виртуального представления ρ , с помощью которого алгебраические свойства представления ρ можно описывать в гомотопических терминах.

*) То есть формальных линейных комбинаций представлений с целыми коэффициентами.

Пусть $G = U(n)$. Тогда элементы группы $K(BU(n))$ описывают всевозможные кохомологические операции в K -теории, при которых каждому n -мерному комплексному расслоению ξ над базой X сопоставляется элемент группы $K(X)$. Если элемент группы $K(BU(n))$ лежит в образе гомоморфизма (1), то тогда эта кохомологическая операция задается просто линейным представлением структурной группы $U(n)$. В частности, интерес представляет вопрос: является ли гомоморфизм (1) эпиморфизмом, и если нет, то каков образ гомоморфизма (1)?

В этом параграфе мы рассмотрим лишь простейшие примеры, оставив более содержательные примеры на следующую главу, где будут разработаны более глубокие вычислительные методы.

Группа $G = S^1$. Всякое линейное комплексное представление группы $S^1 = U(1)$ разлагается в сумму одномерных представлений. Одномерное же представление $\rho_k: G \rightarrow U(1)$ задается формулой

$$\rho_k(z) = z^k, \quad (2)$$

где $z \in G = S^1$ — комплексное число, модуль которого равен единице, а k — целое число. Таким образом, все неприводимые представления нумеруются целыми числами. Совершенно ясно, что тензорное произведение представлений ρ_k удовлетворяет следующему соотношению:

$$\rho_k \otimes \rho_s = \rho_{k+s}. \quad (3)$$

Следовательно, кольцо $R(S^1)$ мультипликативно порождается двумя элементами ρ_1 и ρ_{-1} , т.е. изоморфно факторкольцу $\mathbb{Z}[\rho_1, \rho_{-1}] / \{\rho_1 \rho_{-1} = 1\}$ многочленов от двух образующих ρ и ρ_{-1} с единственным определяющим соотношением $\rho_1 \rho_{-1} = 1$. Такое кольцо иногда называют *кольцом Лорановских многочленов от одной переменной* и обозначают через $\mathbb{Z}[\rho_+, \rho_1^{-1}]$.

С другой стороны, классифицирующее пространство $BG = BS^1 = BU(1)$ гомеоморфно прямому пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^\infty$ комплексных проективных пространств, вложенных друг в друга. Поскольку представление ρ_1 является тождественным гомоморфизмом группы $S^1 = U(1)$ в себя, то соответствующее ему при гомоморфизме (1) расслоение $b(\rho_1) = \xi_G^{\rho_1}$ равно универсальному одномерному расслоению ξ_1 . Следовательно,

$$b(\rho_k) = \underbrace{\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_1}_{k \text{ раз}}$$

при $k \geq 0$. Поскольку $z^{-1} = \bar{z}$ для комплексных чисел $|z| = 1$, то представление ρ_{-1} комплексно сопряжено к представлению ρ_1 . Значит, $b(\rho_{-1}) = \bar{\xi}_1$, а $b(\rho_{-k}) = \underbrace{\bar{\xi}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\xi}_1}_{k \text{ раз}}$.

Кольцо кохомологий пространства $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$ изоморфно кольцу многочленов от одной переменной $H^*(BS^1) = \mathbb{Z}[a]$, $a \in H^2(BS^1)$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм

$$R(S^1) \xrightarrow{b} K(BS^1) \xrightarrow{\text{ch}} H^{**}(BS^1; \mathbb{Q}). \quad (4)$$

Для этого гомоморфизма выполнено соотношение

$$\text{ch } b(\rho_1) = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^k}{k!} + \dots$$

Следовательно, положив $u = \rho - 1$, получим

$$\text{ch } b(u) = a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^k}{k!} + \dots \quad (5)$$

Элемент, стоящий в правой части равенства (5), тоже может служить образующим элементом в кольце формальных рядов, изоморфном кольцу $H^{**}(BS^1; \mathbb{Q})$. Это значит, что образ сквозного гомоморфизма (4) после тензорного произведения на кольцо \mathbb{Q} рациональных чисел образует плотное множество в кольце формальных рядов $H^{**}(BS^1; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[[a]]$, если в качестве базиса окрестностей в кольце $\mathbb{Q}[[a]]$ взять степени идеала рядов с нулевыми свободными членами. Следовательно, мы получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Образ гомоморфизма*

$$R(S^1) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{b} K(BS^1) \otimes \mathbb{Q}$$

является всюду плотным подкольцом в кольце $K(BS^1) \otimes \mathbb{Q}$.

Из соотношения (5) следует, что кольцо $R(S^1)$ изоморфно кольцу лорановских многочленов $\mathbb{Z}[\rho_1, \rho_1^{-1}]$, т.е. других соотношений, кроме соотношения $\rho_1 \rho_1^{-1} = 1$, в кольце $R(S^1)$ нет. В самом деле, рассмотрим кольцо формальных рядов $\mathbb{Z}[[u]]$ и отображение $f: \mathbb{Z}[[u]] \rightarrow \mathbb{Q}[[a]]$, задаваемое формулой

$$f(u) = e^a - 1. \quad (6)$$

Отображение (6) является мономорфизмом. С другой стороны, вложение кольца $\mathbb{Z}[\rho_1, \rho_1^{-1}]$ в кольцо $\mathbb{Z}[[u]]$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\rho_1, \rho_1^{-1}] &\xrightarrow{g} \mathbb{Z}[[u]], \\ g(\rho_1) &= 1 + u, \quad g(\rho_1^{-1}) = 1 - u + u^2 - \dots + (-1)^k u^k + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & R(S^1) & \\ \nearrow p & & \searrow \text{ch } b \\ \mathbb{Z}[\rho_1, \rho_1^{-1}] & & H^{**}(BS^1; \mathbb{Q}) \\ \searrow g & & \nearrow f \\ & \mathbb{Z}[[u]] & \end{array}$$

Поскольку композиция $f \circ g$ является мономорфизмом, то и отображение p тоже является мономорфизмом. Значит, отображение p является изоморфизмом.

Группа $G = \mathbb{Z}$. Классифицирующее пространство группы \mathbb{Z} гомеоморфно окружности S^1 и $K(S^1) = \mathbb{Z}$. Следовательно, два комплексных линейных представления группы \mathbb{Z} той же размерности не различаются гомоморфизмом (1).

Группа $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. В этом случае классифицирующее пространство гомеоморфно $T^2 = S^1 \times S^1$. Поэтому группу $K(T^2)$ можно вычислить, исходя из точной последовательности пары $(T^2, S^1 \vee S^1)$:

$$K^1(S^1 \vee S^1, s_0) \rightarrow K^0(T^2, S^1 \vee S^1) \rightarrow K^0(T^2, s_0) \rightarrow K^0(S^1 \vee S^1, s_0).$$

Поскольку $H^2(T^2, s_0; \mathbb{Q}) = 0$, в силу теоремы из § 3 имеем равенство $K^0(T^2, s_0) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Далее, факторпространство $T^2 / (S^1 \vee S^1)$ гомеоморф-

но двумерной сфере. Следовательно, $K^0(T^2, S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z}$. Поскольку $K^0(S^1 \vee S^1, s_0) = 0$, гомоморфизм $j^*: K^0(T^2, (S^1 \vee S^1)) \rightarrow K^0(T^2, s_0)$ — ненулевой, а $\partial = 0$. Следовательно, группы $K^0(T^2, S^1 \vee S^1)$ и $K^0(T^2, s_0)$ изоморфны и, значит, $K^0(T^2, s_0) = \mathbb{Z}$, или $K^1(T^2, s_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Всякое конечномерное линейное представление группы $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ задается двумя матрицами A и B , удовлетворяющими условию коммутативности $AB = BA$. Если A_t, B_t — два непрерывных семейства невырожденных матриц, удовлетворяющих условию коммутативности $A_t B_t = B_t A_t$, то соответствующее семейство представлений ρ_t группы $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ определяет изоморфные расслоения $\xi_G^{\rho_t}$ над классифицирующим пространством. Поскольку любая пара коммутирующих невырожденных комплексных матриц путем непрерывной деформации может быть переведена в пару единичных матриц с сохранением во время деформации условия невырожденности и перестановочности, отсюда следует, что для любого представления ρ группы G образ $b(\rho) = \xi_G^{\rho}$ является тривиальным расслоением. Итак, гомоморфизм

$$b: R(G) \rightarrow K(BG)$$

в случае группы $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ отображает любое представление ρ на его размерность, значит, он не является эпиморфизмом.

Группа $G = \mathbb{Z}^n$. Случай семейства представлений. Случай группы $G = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ (n раз) разбирается аналогично случаю \mathbb{Z}^2 . Для любого конечномерного комплексного представления ρ группы G расслоение тривиально. Рассмотрим какое-нибудь непрерывное семейство $\rho_y, y \in Y$, представлений группы G , параметризованное топологическим пространством Y . Пусть $X = BG$ — классифицирующее пространство, ξ_G — универсальное расслоение, которое мы будем рассматривать над декартовым произведением $X \times Y^*$). Функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}$ расслоения ξ_G не зависят от аргумента $y \in Y$. Однако композиции $\psi_{\alpha\beta} = \rho_y \circ \varphi_{\alpha\beta}$ являются функциями склейки, зависящими от обоих аргументов $x \in X, y \in Y$. Функции $\psi_{\alpha\beta}$ задают векторное расслоение ξ_G^{ρ} над базой $X \times Y$. И хотя при каждом фиксированном значении аргумента y_0 расслоение $\xi_G^{\rho_{y_0}}$ тривиально, все расслоение ξ_G^{ρ} над базой $X \times Y$ может оказаться нетривиальным.

Например, в качестве пространства Y возьмем группу характеров группы $G, Y = G^*$, а в качестве представления ρ_y — сам характер y группы $G, \rho_y: G \rightarrow S^1$. Разложим группу G в сумму циклических слагаемых $G = G_1 \times \dots \times G_n, G_k = \mathbb{Z}$. Тогда группа характеров G^* разложится в прямое произведение групп $G^* = G_1^* \times \dots \times G_n^*$. Аналогично, классифицирующее пространство BG разлагается в декартово произведение $BG = BG_1 \times \dots \times BG_n$. Все сомножители G_k^* и BG_k гомеоморфны окружности. Поэтому пространство $X \times Y$ имеет вид

$$X \times Y = G^* \times BG = T^n \times T^n.$$

Образующие y групп одномерных когомологий пространств X и Y , соответствующие сомножителям G_k^* и BG_k , обозначим соответственно через $x^k \in H^1(X; \mathbb{Z})$ и $y_l \in H^1(Y; \mathbb{Z})$.

В данном случае расслоение ξ_G^{ρ} одномерно и имеет единственный нетривиальный класс Чженя $c_1(\xi_G^{\rho})$.

*) То есть будем рассматривать прообраз расслоения ξ_G при проекции $X \times Y \rightarrow X$.

Теорема 2. Пусть ρ — семейство всех характеров группы $G = \mathbb{Z}^n$.
Имеет место формула

$$c_1(\xi_G^\rho) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Доказательство. Двумерные когомологии пространства $X \times Y$ порождаются элементами вида $x_i x_j$, $x_i y_j$ и $y_i y_j$. Поэтому имеет место разложение вида

$$c_1(\xi_G^\rho) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j + \sum \mu_{ij} x_i y_j + \sum \nu_{ij} y_i y_j.$$

Наша задача заключается в вычислении целочисленных коэффициентов λ_{ij} , μ_{ij} , ν_{ij} . Сумма $\sum \mu_{ij} x_i y_j$ является классом Чженя c_1 ограничения расслоения ξ_G^ρ на подпространство $X \times Y_0$, а сумма $\sum \nu_{ij} y_i y_j$ является классом Чженя c_1 ограничения расслоения ξ_G^ρ на подпространство $X_0 \times Y$. Поэтому обе суммы равны нулю. Каждый коэффициент λ_{ij} можно вычислить, интерпретируя его как коэффициент класса Чженя ограничения расслоения ξ_G^ρ на произведение $BG_i \times G_j^*$. Функции склейки ограничения ξ_G^ρ на подпространство $BG_i \times G_j^*$ зависят только от ограничения представления ρ на подгруппу G_i . Если $i \neq j$, то при изменении координаты $y \in G_j^*$ представление $\rho|_{G_i}$ не меняется. Значит, ограничение расслоения ξ_G^ρ на подпространство $BG_i \times G_j^*$ будет тривиальным, а поэтому и $\lambda_{ij} = 0$. Остается рассмотреть случай группы $G = \mathbb{Z}$, когда $X = S^1$, $Y = S^1$. Без ограничения общности можно считать, что карты U_1 и U_2 — это верхняя и нижняя полуокружности, а пересечение карт состоит из двух точек: $U_1 \cap U_2 = \{1, -1\}$. Главное расслоение ξ_G над пространством $X \times S^1$ определяется единственной функцией склейки φ_{12} на пересечении двух карт $U_1 \cap U_2$. При этом $\varphi_{12}(1) = 0$, $\varphi_{12}(-1) = 1$. Пусть $y \in Y = S^1$ — характер группы $G = \mathbb{Z}$. Тогда композиция функций склейки φ_{12} с представлением ρ задается формулой

$$\psi_{12}(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ y, & x = -1. \end{cases} \quad (7)$$

Если мы в двумерном торе T^2 стянем в одну точку меридиан $x = 1$ и параллель $y = 1$, то получим пространство, гомеоморфное двумерной сфере. При этом второй меридиан $x = -1$ разобьет сферу S^2 на два диска. Та же функция склейки ψ_{12} задает расслоение η над сферой S^2 , причем $p^*(\eta) = \xi_G^\rho$, где $p: T^2 \rightarrow S^2$ — естественная проекция. Расслоение же η изоморфно расслоению Хопфа (см. § 6 главы 1). Следовательно, первый класс Чженя $c_1(\eta)$ является образующей в группе $H^2(S^2; \mathbb{Z})$. С другой стороны, $p^*(c_1(\eta)) = xy$, $x, y \in H^1(T^2; \mathbb{Z})$. Теорема 2 полностью доказана.

§ 5. Эquivariantные расслоения

Пусть G — компактная группа Ли. Под G -пространством мы будем понимать топологическое пространство X вместе с действием группы G на нем. Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение G -пространств, причем

$$f(gx) = gf(x), \quad g \in G, \quad (1)$$

то f называется *equivariantным отображением*.

Пусть задано локально тривиальное расслоение

$$p: E \rightarrow X. \quad (2)$$

Если база X и тотальное пространство E являются G -пространствами, а проекция p является эквивариантным отображением, то расслоение (2) называется G -расслоением.

Если расслоение (2) является векторным расслоением, а действие группы G в тотальном пространстве является линейным преобразованием расслоения, то расслоение (2) называется *векторным G -расслоением*.

Теория векторных G -расслоений во многом аналогична обычной теории векторных расслоений. Векторные расслоения с действием групп G допускают операции прямой суммы и тензорного умножения.

В случае, если действие группы G на базе X является достаточно простым, то описание векторных G -расслоений сводится к задаче описания обычных векторных расслоений.

Например, пусть пространство X является тотальным пространством главного G -расслоения с базой Y , т.е. пространство орбит действия группы G на X гомеоморфно пространству Y , а естественная проекция

$$\pi: X \rightarrow Y \quad (3)$$

является локально тривиальным расслоением. Тогда говорят еще, что группа G *свободно действует* на пространстве X .

Т е о р е м а 1. *Множество векторных G -расслоений над пространством X изоморфно множеству векторных расслоений над пространством Y , а изоморфизм устанавливается с помощью соответствия $\eta \rightarrow \pi^*(\eta)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В расслоении $\pi^*(\eta)$ канонически задается действие группы G . Если $y \in Y$ — произвольная точка, $U \ni y$ — достаточно малая окрестность, то $\eta|U = U \times F$, а $\pi^{-1}(U) = U \times G$. Тогда ограничение расслоения $\pi^*(\eta)$ на $\pi^{-1}(U)$ изоморфно декартову произведению $U \times G \times F$. Действие группы G на $U \times G \times F$ задаем левыми сдвигами второго сомножителя.

Обратно, пусть $\xi \rightarrow X$ — произвольное G -расслоение. Рассмотрим точку $y \in Y$ и $V = \pi^{-1}(U)$, $y \in U$. Имеет место гомеоморфизм $V = U \times G$. Пусть $x \in \pi^{-1}(y)$ и $W = U \times O$ — достаточно малая окрестность такая, что ограничение расслоения ξ на W тривиально, т.е. $\xi|W = U \times O \times F$. Пусть $x = (y, e) \in V = U \times G$. Тогда существует такой изоморфизм $\xi|W = U \times O \times F$, что действие группы G является левым сдвигом по второму множителю. В самом деле, зададим отображение $\varphi: U \times O \times F \rightarrow \xi|W$ следующим образом: пусть $\varphi: U \times \{e\} \times F \rightarrow \xi|U \times \{e\}$ — некоторый гомоморфизм. Положим

$$\varphi(y, g, f) = g\varphi(y, e, f) \in \xi|W, \quad y \in U, \quad g \in O. \quad (4)$$

Поскольку формула (4) имеет смысл для любого элемента $g \in G$, то получаем изоморфизм

$$\varphi: U \times G \times F \rightarrow \xi|\pi^{-1}(U).$$

Если $\varphi': U' \times G \times F \rightarrow \xi'|\pi^{-1}(U')$ — другой такой же изоморфизм, то их композиция

$$\psi = \varphi'^{-1}\varphi: (U \cap U') \times G \times F \rightarrow (U \cap U') \times G \times F \quad (5)$$

является эквивариантным отображением относительно левых сдвигов по второму множителю, т.е.

$$\psi(y, g, f) = (y, g, \bar{\psi}(y, f)),$$

а функция $\bar{\psi}$ не зависит от аргумента $g \in G$. Это значит, что функции типа (5) задают функции склейки локально тривиального расслоения η над базой Y , причем $\pi^*(\eta) = \xi$. Теорема 1 доказана.

Второй крайний случай — когда группа G тривиально действует на базе X .

Т е о р е м а 2. Если группа G тривиально действует на базе X , то для любого комплексного векторного G -расслоения ξ существуют такие неприводимые G -модули V_i и такие комплексные векторные расслоения ξ_i над пространством X , что

$$\xi = \bigoplus_i (\xi_i \otimes V_i). \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку группа G тривиально действует на базе X , она линейно действует на каждом слое ξ_x . Поэтому каждый слой ξ_x можно представить в виде суммы подпространств, соответствующих неприводимым модулям V_i — каждый с некоторой конечной кратностью. Значит,

$$\xi_x = \bigoplus_i (\xi_{x,i} \otimes V_i). \quad (7)$$

Допустим, что представление (7) локально не зависит от точки x . Это значит, что расслоение ξ в каждой достаточно малой окрестности U_α представляется в виде декартова произведения

$$\xi|U_\alpha = \xi_{x_0} \times U_\alpha = \left[\bigoplus_i (\xi_{x_0,i} \otimes V_i) \right] \times U_\alpha. \quad (8)$$

Согласно лемме Шура всякий эквивариантный гомоморфизм $\psi: V_i \rightarrow V_j$ равен нулю при $i \neq j$ и кратен тождественному при $i = j$, т.е. $\psi(x) = \lambda x$. Тогда функции склейки $\psi_{\alpha\beta}$, являясь эквивариантными, по лемме Шура обязаны иметь вид

$$\psi_{\alpha\beta} = \bigoplus_i (\psi_{\alpha\beta,i} \otimes V_i), \quad (9)$$

где

$$\psi_{\alpha\beta,i}: \xi_{x_0,i} \times (U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \xi_{x_0,i} \times (U_\alpha \cap U_\beta)$$

— некоторые функции склейки, определяющие расслоения ξ_i . Трудность заключается в установлении разложения (8), хотя оно и представляется правдоподобным, поскольку два неприводимых представления компактной группы G , задаваемые близкими матрицами, являются изоморфными.

Вместо доказательства локальной независимости представления (7) от точки x мы изложим элегантное инвариантное доказательство А т ь я [3]. Рассмотрим векторное G -расслоение $E \rightarrow X$ с тривиальным действием группы G на пространстве X . Обозначим через E^G множество неподвижных точек тотального пространства при действии группы G . Тогда отображение $E^G \rightarrow X$ тоже является локально тривиальным векторным расслоением. В самом деле, пусть V — векторное G -пространство. Положим

$$P(v) = \int_G g(v) d\mu(g), \quad (10)$$

где $d\mu(g)$ — мера Хаара на компактной группе G . Очевидно, что $P(P(v)) = P(v)$, поскольку

$$\begin{aligned} P(P(v)) &= \int_G h(P(v)) d\mu(h) = \int_G \int_G hg(v) d\mu(h) d\mu(g) = \\ &= \int_G \int_G g'(v) d\mu(g') d\mu(h') = \int_G g'(v) d\mu(g') \cdot \int_G d\mu(h') = \\ &= \int_G g'(v) d\mu(g') = P(v). \end{aligned}$$

С другой стороны, $g(P(v)) = P(v)$, а если $g(v) = v$, то $P(v) = v$. Значит,

образ проектора P совпадает с подпространством V^G . Формула (10) может быть применена к определению проектора в каждом слое расслоения E . В результате получаем проектор в расслоении $P: E \rightarrow E$. На основании теоремы 1 § 4 главы 1 образ E^G проектора P является расслоением.

Обозначим через $\text{HOM}_G(\xi_1, \xi_2) \subset \text{HOM}(\xi_1, \xi_2)$ подмножество точек расслоения $\text{HOM}(\xi_1, \xi_2)$ (определение расслоения $\text{HOM}(\xi_1, \xi_2)$ см. в § 3 главы 1), неподвижных относительно естественного действия группы G в расслоении $\text{HOM}(\xi_1, \xi_2)$: $\varphi \rightarrow g\varphi g^{-1}$. Тогда на основании сказанного выше пространство $\text{HOM}_G(\xi_1, \xi_2)$ является локально тривиальным расслоением, слоем которого является пространство $\text{HOM}_G(\xi_{1x}, \xi_{2x})$.

Теперь определим инвариантным образом составляющие в формуле (6). Пусть V_i — неприводимый G -модуль. Через \underline{V}_i обозначим G -расслоение $X \times V_i$. Положим

$$\xi_i = \text{HOM}_G(\underline{V}_i, \xi). \quad (11)$$

Очевидно, существует отображение

$$\alpha: \bigoplus_i (\underline{V}_i \otimes \text{HOM}_G(\underline{V}_i, \xi)) \rightarrow E, \quad (12)$$

которое на каждом слагаемом $\underline{V}_i \otimes \text{HOM}_G(\underline{V}_i, \xi)$ вполне определяется формулой

$$\alpha(x, \varphi) = \varphi(x). \quad (13)$$

Отображение (12) является эквивариантным отображением расслоений. Поэтому изоморфность отображения (12) достаточно проверить в каждой точке, что сводится к лемме Шура о неприводимых комплексных представлениях компактной группы. Теорема 2 полностью доказана.

§ 6. Связь между комплексными, симплектическими и вещественными расслоениями

Расслоения с действием какой-либо группы G удобны при единообразном описании трех различных структур на расслоениях — комплексной, симплектической или вещественной.

Рассмотрим в качестве группы G группу второго порядка Z_2 . Пусть заданы Z_2 -пространство X и комплексное векторное расслоение $p: E \rightarrow X$ над базой X . Пусть в тотальном пространстве E задано действие группы Z_2 , превращающее это расслоение в вещественное векторное Z_2 -расслоение. Что же касается введенной на этом расслоении комплексной структуры, то пусть образующий элемент $\tau \in Z_2$ действует в каждом слое антикомплексно, т.е.

$$\tau(\lambda y) = \bar{\lambda} \tau(y),$$

где $y \in p^{-1}(x)$ — произвольный вектор из слоя $p^{-1}(x)$, а λ — произвольное комплексное число. Такое расслоение вместе с комплексной структурой и антикомплексной инволюцией τ будем называть KR -расслоением. Соответственно, группу Гротендика, порожденную всеми KR -расслоениями над базой X , обозначим через $KR(X)$.

В зависимости от выбора класса пространств, играющих роль базы, будем получать различные известные уже K -теории.

Предложение 1. Пусть $X = Y \times Z_2$ и инволюция τ переставляет элементы второго множителя. Тогда группа $KR(X)$ естественно изоморфна группе $K_U(Y)$, порожденной комплексными расслоениями.

Доказательство. Всякое KR -расслоение над пространством X состоит из объединения двух расслоений: ξ — над подпространством

$Y \times \{0\}$ и η — над подпространством $Y \times \{1\}$. Поскольку инволюция τ переставляет слагаемые $Y \times \{0\}$ и $Y \times \{1\}$, то получается изоморфизм $\tau: \xi \rightarrow \eta$, являющийся антикомплексным отображением. Согласно определению расслоение η изоморфно комплексно сопряженному расслоению $\tau^*(\bar{\xi})$. Обратно, пусть ξ — произвольное комплексное расслоение над пространством Y . Тогда $\bar{\xi}$ — это то же самое расслоение с измененной комплексной структурой (см. § 4 главы 1). Тожественное отображение $\tau: \xi \rightarrow \tau^*(\bar{\xi})$ является, очевидно, антикомплексным. На пространстве $X = Y \times \mathbb{Z}_2$ зададим расслоение $\eta = \xi \cup \tau^*(\bar{\xi})$ с инволюциями $\tau: \xi \rightarrow \tau^*(\bar{\xi})$ и $\tau^{-1}: \tau^*(\bar{\xi}) \rightarrow \xi$. Расслоение η , очевидно, является KR -расслоением.

Предложение 2. Пусть инволюция на пространстве X тривиальна. Тогда $KR(X) = K_O(X)$.

Доказательство. Пусть X — пространство, на котором действие группы \mathbb{Z}_2 тривиально. Поскольку ξ является KR -расслоением, то инволюция τ действует в каждом слое как антикомплексный линейный оператор. Множество ξ^τ неподвижных точек является согласно предыдущему параграфу тотальным пространством вещественного расслоения. При этом множество ξ^τ всех векторов y , для которых $\tau(y) = y$, очевидно, изоморфно расслоению ξ^τ , причем само расслоение ξ является комплексификацией с ξ^τ вещественного расслоения ξ^τ . Таким образом, $KR(X) = K_O(X)$.

Предложение 3. Операция забывания инволюции превращает каждое KR -расслоение в обычное комплексное расслоение и задает гомоморфизм

$$KR(X) \rightarrow K_U(X). \quad (1)$$

Если инволюция на пространстве X тривиальна, то гомоморфизм (1) превращается в гомоморфизм комплексификации

$$c: K_O(X) \rightarrow K_U(X). \quad (2)$$

Обратно, если ξ — произвольное комплексное расслоение, а на пространстве X задана инволюция τ , то на расслоении $\eta = \xi \oplus \tau^*\bar{\xi}$ определена естественная антикомплексная инволюция, задающая гомоморфизм

$$K_U(X) \rightarrow KR(X). \quad (3)$$

В случае неподвижной инволюции на пространстве X операция (3) превращается в операцию овеществления комплексного расслоения

$$r: K_U(X) \rightarrow K_O(X). \quad (4)$$

По аналогии с комплексными векторными расслоениями для KR -расслоений определяется операция тензорного умножения, превращающая группу $KR(X)$ в кольцо. Чтобы дополнить группы $KR(X)$ до теории когомологий, необходимо определить сначала понятие надстройки для пространства X с действием группы \mathbb{Z}_2 . Надстройка размерности n над парой (X, Y) определяется как новая пара $(X \times D^n, (X \times S^{n-1}) \cup (Y \times D^n))$, где D^n — n -мерный диск с границей $\partial D^n = S^{n-1}$. В случае действия инволюции τ на пространстве X следует перенести это действие на декартово произведение $X \times D^n$. Для этого необходимо задать инволюцию на втором множителе D^n . Мы имеем следующие возможности. Обозначим через $D^{p,q}$, $p + q = n$, n -мерный диск с инволюцией r , которая меняет знак у первых p декартовых координат точки диска. Тогда надстройки пары (X, Y) нумеруются уже двумя целочисленными индексами:

$$(X \times D^{p,q}, (X \times S^{p,q}) \cup (Y \times D^{p,q})),$$

где $S^{p,q} = \partial D^{p,q}$ — граница диска $D^{p,q}$. Положим

$$KR^{p,q}(X, Y) = KR(X \times D^{p,q}, (X \times S^{p,q}) \cup (Y \times D^{p,q})), \quad (5)$$

где $KR(X, Y)$ определяется как ядро отображения $KR(X/Y) \rightarrow KR(\text{pt})$. Получаем биградуированный функтор $KR^{p,q}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, который, очевидно, является гомотопическим и для которого выполняется следующая аксиома теории когомологий: если (X, Y, Z) — тройка пространств с инвариантным действием группы Z_2 , то имеют место точные последовательности

$$\dots \rightarrow KR^{p,q}(X, Z) \rightarrow KR^{p,q}(Y, Z) \rightarrow KR^{p,q-1}(X, Y) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow KR^{p,1}(Y, Z) \rightarrow KR^{p,0}(X, Y) \rightarrow KR^{p,0}(X, Z) \rightarrow KR^{p,0}(Y, Z)$$

для любого целого числа $p \geq 0$.

Точно так же, как и в случае обычной K -теории, тензорное умножение в группах $KR(X)$ продолжается до градуированного умножения

$$KR^{p,q}(X, Y) \otimes KR^{p',q'}(X, Y') \rightarrow KR^{p+p',q+q'}(X, Y \cup Y').$$

Более того, на случай KR -теории дословно переносится доказательство теоремы о периодичности Ботта.

Для этого представим сферу S^2 в виде пополненной комплексной плоскости: $S^2 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$. Операция комплексного сопряжения задает на сфере S^2 инволюцию. Более того, пара (S^2, ∞) с указанной инволюцией может быть представлена в виде факторпространства $(D^{1,1}/S^{1,1}, [S^{1,1}])$.

Для KR -расслоений справедливы все основные свойства, которые мы устанавливали для обычных векторных расслоений. В частности, имеет место

Предложение 4. Пусть X — пространство с инволюцией τ , $p: E \rightarrow X$ — некоторое n -мерное KR -расслоение с базой X . Тогда для любой точки $x_0 \in X$ существует инвариантная относительно инволюции τ окрестность $x_0 \in U \subset X$, для которой прообраз $p^{-1}(U)$ эквивариантно гомеоморфен декартову произведению $U \times \mathbb{C}^n = U \times \mathbb{R}^{n,n}$.

Доказательство. Если $\tau(x_0) \neq x_0$, то доказательство сводится к предложению 1, поскольку существует такая окрестность $V \ni x_0$, что множество $\tau(V)$ не пересекается с множеством V . Пусть $\tau(x_0) = x_0$. Поскольку KR -расслоение является просто (т.е. без учета инволюции) локально тривиальным расслоением, то найдется такая окрестность U , $\tau(U) = U$, что $p^{-1}(U) = U \times \mathbb{C}^n$. Инволюция τ в прообразе $p^{-1}(U)$ задается по формуле $\tau(x, u) = (\tau(x), A_x u)$, где A_x — непрерывное семейство антикомплексных операторов, причем $A_{\tau(x)} A_x \equiv 1$. Поскольку $\tau(x_0) = x_0$, то $A_{x_0}^2 = 1$. Поэтому существует такой базис e_1, \dots, e_n в комплексном векторном пространстве \mathbb{C}^n , что оператор A_{x_0} задается комплексным сопряжением координат. Вещественная матрица оператора A_{x_0} имеет вид

$$A_{x_0} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Спектр оператора A_{x_0} состоит из двух точек $\{-1, 1\}$. В окрестности U спектр оператора A_x распадается на два множества — одно лежит в окрестности точки 1, а другое — в окрестности точки (-1) . Рассмотрим контур γ в комплексной плоскости, симметричный относительно вещественной оси и охватывающий окрестность точки 1. Проектор P_x на корневое подпространство, соответствующее собственным значениям опера-

тора A_x , близким к единице, задается интегралом

$$P_x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (A_x - z)^{-1} dz. \quad (6)$$

Очевидно, что P_x — вещественный проектор, $P_x = P_{\tau x}$ и $IP_x = (1 - P_x)I$, где I — оператор умножения на мнимую единицу. Таким образом, семейство проекторов P_x задает такой комплексный базис в слоях $p^{-1}(U)$, что матрица оператора A_x имеет вид

$$A_x = \begin{pmatrix} \bar{A}_x & 0 \\ 0 & -\bar{A}_x \end{pmatrix}, \quad (7)$$

причем $\bar{A}_{x_0} = E$, $\bar{A}_{\tau x} = \bar{A}_x^{-1}$. Положим, далее,

$$\bar{A}_x^\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^\epsilon (\bar{A}_x - z)^{-1} dz. \quad (8)$$

Ясно, что $\bar{A}_x^1 = \bar{A}_x$, $\bar{A}_x^0 = E$. Формула (8) задает непрерывное семейство операторов от двух переменных (x, ϵ) .

Пусть U_τ — множество неподвижных точек инволюции τ в окрестности U . Тогда дополнение $U \setminus U_\tau$ можно покрыть локально конечным покрытием $\{V_\alpha\}$, причем $V_\alpha = V'_\alpha \cup V''_\alpha$, $V'_\alpha \cap V''_\alpha = \emptyset$, $\tau(V'_\alpha) = V''_\alpha$. Пусть $\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha + \varphi''_\alpha$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_\alpha\}$, и пусть $\text{supp } \varphi'_\alpha \subset V'_\alpha$, $\text{supp } \varphi''_\alpha \subset V''_\alpha$, $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$, $\varphi'_\alpha(x) = \varphi''_\alpha(\tau x)$. Тогда семейство операторов

$$A_{\alpha, x} = \bar{A}_x^{\varphi_\alpha(x)} \quad (9)$$

при каждом α непрерывно по x и $A_{\alpha, x}^{-1} = A_{\alpha, \tau(x)}$. Более того, все операторы $A_{\alpha, x}$ при фиксированном значении x попарно коммутируют, $A_{\alpha, x} A_{\beta, x} = A_{\beta, x} A_{\alpha, x}$, при $x \notin V'_\alpha \cup V''_\alpha$ выполнено равенство $A_{\alpha, x} = 1$, а при $x \in U \setminus U_\tau$ справедливо соотношение $\bar{A}_x = \prod_{\alpha} A_{\alpha, x}$.

Положим, далее.

$$B_{\alpha, x} = \begin{cases} A_{\alpha, x}, & x \in V'_\alpha, \\ 1, & x \notin V'_\alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$A_{\alpha, x} = B_{\alpha, x} B_{\alpha, \tau x}^{-1}. \quad (10)$$

В самом деле, если $x \in V'_\alpha$, то $B_{\alpha, \tau x} = 1$. Если же $x \in V''_\alpha$, т.е. $\tau x \in V'_\alpha$, то $B_{\alpha, x} = 1$ и $A_{\alpha, x} = A_{\alpha, \tau x}^{-1} = B_{\alpha, \tau x}^{-1}$. В случае, когда $x \notin V'_\alpha \cup V''_\alpha$, выполняется равенство $B_{\alpha, x} = B_{\alpha, \tau x} = A_{\alpha, x} = 1$. Положим

$$B_x = \begin{cases} \prod_{\alpha} B_{\alpha, x}, & x \in U \setminus U_\tau, \\ 1, & x \in U_\tau. \end{cases} \quad (11)$$

Покажем, что функция B_x непрерывна. Если $x \in U \setminus U_\tau$, то непрерывность функции B_x следует из локальной конечности покрытия $\{V_\alpha\}$. Пусть $x \in U_\tau$ и $y \rightarrow x$, $y \in U \setminus U_\tau$. Для каждой точки $y \in U \setminus U_\tau$ имеет место соотношение

$$B_y = \prod_{\alpha} B_{\alpha, y} = \bar{A}_y^{\psi(y)},$$

где $\psi(y) = \sum_{\alpha} \varphi'_{\alpha}(y)$. Поскольку $0 \leq \psi(y) \leq 1$, функция $z^{\psi(y)}$ ограничена на контуре γ . Поэтому из условия $\bar{A}_y \rightarrow 1$ при $y \rightarrow x$ следует, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{\psi(y)} (\bar{A}_y - z)^{-1} dz$$

стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{\psi(y)} (1 - z)^{-1} dz = 1.$$

Этим завершается доказательство непрерывности функции B_x . Наконец, из формулы (10) следует, что

$$\bar{A}_x = B_x B_{\tau x}^{-1}. \quad (12)$$

Матричная функция B_x , таким образом, задает новую систему координат в слоях расслоения $p^{-1}(U) = U \times \mathbb{C}^n$, при переходе к которой семейство операторов A_x переходит в постоянный оператор комплексного сопряжения. Предложение 4 полностью доказано.

Предложение 5. Пусть X — компактное пространство с инволюцией, ξ — некоторое KR -расслоение с базой X . Тогда существует другое KR -расслоение η такое, что прямая сумма $\xi \oplus \eta$ является тривиальным KR -расслоением, т.е.

$$\xi \oplus \eta = X \times \mathbb{C}^N = X \times \mathbb{R}^{N, N}.$$

Доказательство. Согласно предложению 4 для каждой точки $x \in X$ найдется такая инвариантная окрестность U , что ограничение расслоения ξ на окрестность U тривиально, т.е. существует эквивариантное отображение $\xi|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$. Пусть U_{α} — конечное покрытие указанными выше окрестностями и φ_{α} — инвариантные функции относительно инволюции τ , образующие разбиение единицы, подчиненное покрытию U_{α} . Пусть

$$f_{\alpha}: \xi|_{U_{\alpha}} \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n$$

— эквивариантный изоморфизм, тогда отображение $g_{\alpha} = \varphi_{\alpha} f_{\alpha}$ продолжается до гомоморфизма KR -расслоений

$$g_{\alpha}: \xi \rightarrow X \times \mathbb{C}^n, \quad (13)$$

причем на внутренности $\text{supp } \varphi_{\alpha}$ отображение g_{α} является изоморфизмом. Положим

$$g: \xi \rightarrow X \times \mathbb{C}^{Nn}, \quad g = \bigoplus_{\alpha=1}^N g_{\alpha}, \quad \mathbb{C}^{Nn} = \bigoplus_{\alpha=1}^N \mathbb{C}_{\alpha}^n, \quad (14)$$

где \mathbb{C}_{α}^n — копии комплексного пространства \mathbb{C}^n . Совершенно ясно, что гомоморфизм g является мономорфизмом в каждом слое над точкой $x \in X$. Пусть η — расслоение, составленное из ортогональных дополнений к слоям подрасслоения $g(\xi)$ в тривиальном расслоении $X \times \mathbb{C}^{Nn}$. Поскольку инволюция является ортогональным оператором в каждом слое $\mathbb{C}^{Nn} = \mathbb{R}^{Nn, Nn}$, то расслоение η инвариантно относительно инволюции τ . Значит, η является KR -расслоением. Предложение 5 доказано.

Используя предложения 4 и 5, легко проверить, что доказательства теорем 1 и 2 из § 1 дословно переносятся на случай KR -расслоений. Разностная конструкция (33) из § 1 для случая $n = 1$, очевидно, инвариантна относительно некоторого действия инволюции τ . В самом деле, в нашем

случае расслоение η — это тривиальное одномерное расслоение над двумерным диском $D^{1,1}$: $\eta = D^{1,1} \times \mathbb{C}^1$. Зададим инволюцию τ на расслоении η с помощью комплексного сопряжения по каждой координате. Тогда разностная конструкция определяется как точная последовательность

$$0 \rightarrow \Lambda_0 \eta \xrightarrow{d_0} \Lambda_1 \eta \rightarrow 0. \quad (15)$$

Здесь $\Lambda_0 \eta = D^{1,1} \times \mathbb{C}^1$, $\Lambda_1 \eta = D^{1,1} \times \mathbb{C}^1 = \eta$, а d_0 — умножение на число z , где z — точка базы $D^{1,1} \subset \mathbb{C}^1$. Гомоморфизм d_0 коммутирует с действием группы \mathbb{Z}_2 в расслоениях $\Lambda_0 \eta$ и $\Lambda_1 \eta$ и, следовательно, определяет элемент

$$\beta \in KR(D^{1,1}, S^{1,1}) = KR^{1,1}(\text{pt}).$$

Формулировка периодичности Ботта для KR -теории имеет следующий вид.

Теорема 1. Гомоморфизм умножения на элемент β :

$$\beta: KR^{p,q}(X, Y) \rightarrow KR^{p+1,q+1}(X, Y) \quad (16)$$

является изоморфизмом.

Доказательство теоремы мы предоставляем читателю, который должен проверить, что все конструкции теоремы 1 из § 2 эквивариантны, т.е. перестановочны с антикомплексной инволюцией τ .

Для нас более существенным является следующее геометрическое соображение.

Лемма 1. Пусть X — произвольное пространство с инволюцией. Тогда следующие пространства с инволюцией гомеоморфны:

- 1) $X \times S^{1,0} \times D^{0,1} \approx X \times S^{1,0} \times D^{1,0}$;
- 2) $X \times S^{2,0} \times D^{0,2} \approx X \times S^{2,0} \times D^{2,0}$;
- 3) $X \times S^{4,0} \times D^{0,4} \approx X \times S^{4,0} \times D^{4,0}$.

Во всех трех случаях гомеоморфизм

$$\mu: X \times S^{p,0} \times D^{0,p} \rightarrow X \times S^{p,0} \times D^{p,0},$$

$p = 1, 2, 4$, задается формулой

$$\mu(x, s, u) = (x, s, su), \quad (17)$$

если отождествить пространства $S^{p,0}$, $D^{0,p}$, $D^{p,0}$ соответственно с единичной сферой и единичным диском в поле вещественных, комплексных чисел или в теле кватернионов.

Из леммы 1 мы получаем следующие изоморфизмы:

$$KR^{p,q}(X \times S^{1,0}) \approx KR^{p-1,q-1}(X \times S^{1,0}), \quad (18)$$

$$KR^{p,q}(X \times S^{2,0}) \approx KR^{p-2,q-2}(X \times S^{2,0}), \quad (19)$$

$$KR^{p,q}(X \times S^{4,0}) \approx KR^{p-4,q+4}(X \times S^{4,0}). \quad (20)$$

Рассмотрим сначала изоморфизм (18). Вместе с периодичностью Ботта (16) мы получаем, что группа $KR^{p,q}(X \times S^{1,0})$ изоморфна группе $KR^{p,q+2}(X \times S^{1,0})$. Значит, все группы $KR^{p,q}(X \times S^{1,0})$ полностью определяются только двумя группами: $KR^{0,0}(X \times S^{1,0})$ и $KR^{0,1}(X \times S^{1,0})$. В частности, группы $KR^{p,q}(X \times S^{1,0})$ можно теперь определить и для любых значений номеров p, q — как положительных, так и отрицательных (рис. 12). На рис. 12 сплошной стрелкой показан изоморфизм Ботта, а пунктирной стрелкой — изоморфизм (18).

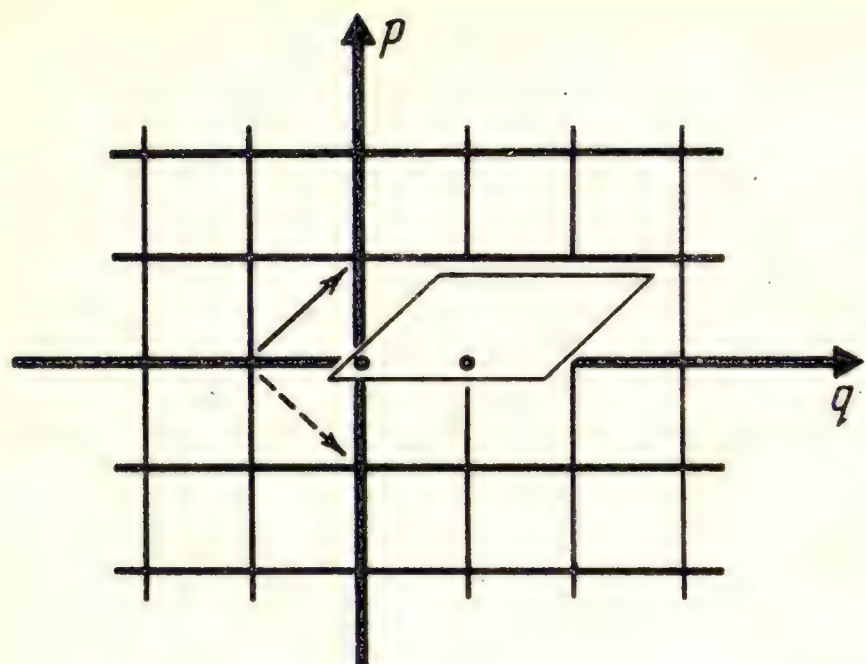


Рис. 12.

С другой стороны, для всякого пространства X с инволюцией декартово произведение $X \times S^{1,0}$ эквивариантно гомеоморфно произведению $X \times Z_2$, в котором инволюция по первому множителю тривиальна. В самом деле, гомеоморфизм

$$\nu: X \times S^{1,0} \rightarrow X \times Z_2,$$

задаваемый формулой

$$\nu(x, 1) = (x, 1),$$

$$\nu(x, -1) = (\tau x, -1),$$

является эквивариантным. Таким

образом, на основании изоморфизма (18) и предложения 1 мы получаем классическую периодичность Ботта:

$$\begin{aligned} K_U^{-n}(X) &= KR^{n,0}(X \times S^{1,0}) = KR^{n+1,1}(X \times S^{1,0}) = \\ &= KR^{n+2,0}(X \times S^{1,0}) = K_U^{-(n+2)}(X). \end{aligned} \quad (21)$$

Следующий наш шаг заключается в установлении еще одного периода в KR -теории.

Теорема 2. Существует элемент

$$\alpha \in KR^{0,8}(\text{pt}) = KR(D^{0,8}, S^{0,8}),$$

умножение на который определяет изоморфизм

$$\alpha: KR^{p,q}(X, Y) \rightarrow KR^{p,q+8}(X, Y). \quad (22)$$

Теоремы 1 и 2 утверждают, что биградуированная KR -теория является дважды периодической. Для определения произвольной группы $KA^{p,q}(X, Y)$ достаточно знать всего лишь 8 групп: $KR^{0,0}, KR^{0,1}, KR^{0,2}, KR^{0,3}, KR^{0,4}, KR^{0,5}, KR^{0,6}, KR^{0,7}$, как это показано на рис. 13. На рис. 13 сплошной стрелкой показан изоморфизм Ботта (16), а пунктирной — изоморфизм (22).

В случае, когда инволюция τ действует на пространстве X тривиально, мы получаем $KR^{0,q}(X) = K_O^{-q}(X)$ и, следовательно, 8-периодичность вещественной K -теории.

Оказывается, предложенная схема может быть несколько модифицирована, в результате чего в нее можно включить еще один вид векторных расслоений — симплектические расслоения.

Пусть K — тело кватернионов. Как обычно, в тело кватернионов K введем четыре образующих $1, i, j, k$ такие, что $k = ij = -ji$, $ik = -ki = -j$, $jk = -kj = i$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. По аналогии с вещественными или комплексными расслоениями можно рассматривать векторные расслоения со слоем K^n — n -мерное кватернионное пространство и структурной группой $GL(n, K)$. Такие расслоения мы будем называть *симплектическими расслоениями*.

Симплектическое расслоение можно представлять себе как комплексное расслоение $p: E \rightarrow X$, в тотальном пространстве которого задан послойный оператор $J: E \rightarrow E$, удовлетворяющий условиям $IJ + JI = 0$, $J^2 = -1$, где I — оператор умножения на мнимую единицу.

Более общо, пусть в тотальном пространстве комплексного расслоения ξ задано послойное антикомплексное преобразование τ четвертого

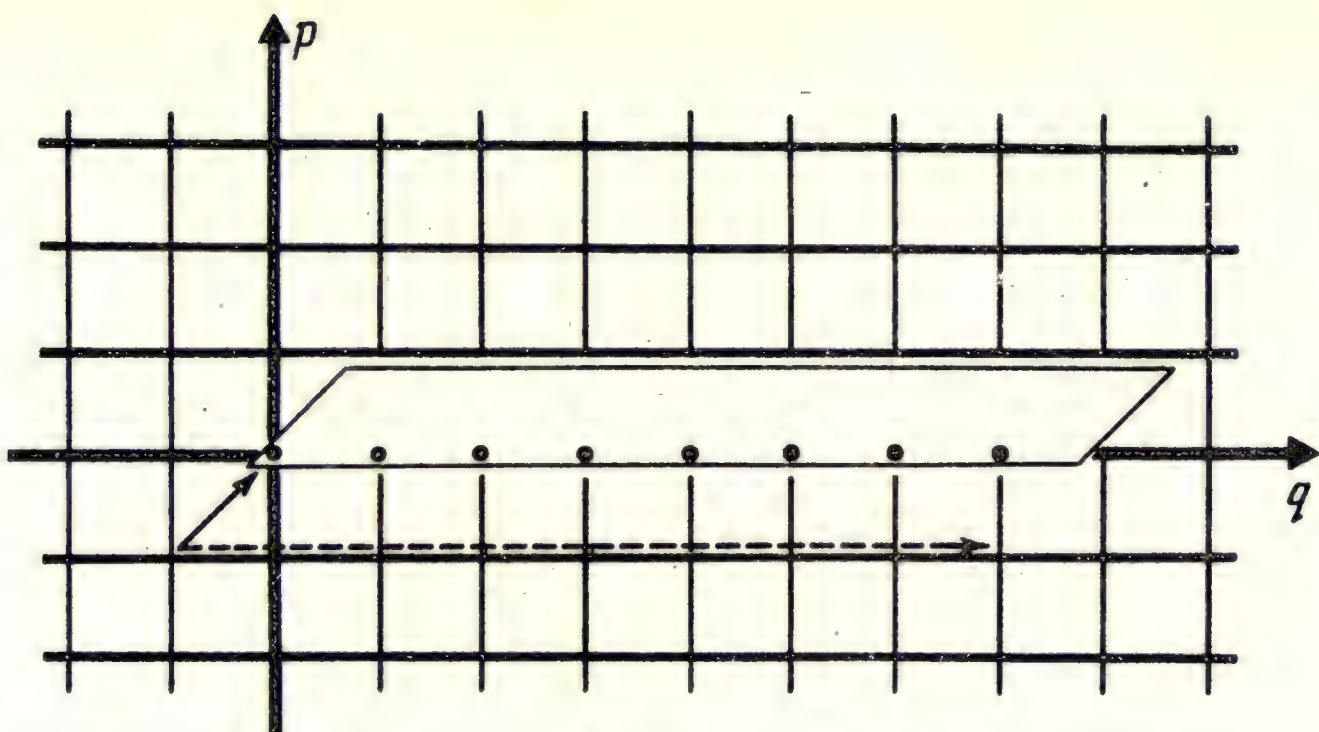


Рис. 13.

порядка, т.е. $\tau J + J\tau = 0$, $\tau^4 = 1$. Тогда $\tau^2 J = J\tau^2$. Значит, τ^2 является комплексным преобразованием второго порядка. Расслоение ξ разлагается в прямую сумму двух своих комплексных подрасслоений: $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, а преобразование τ^2 оставляет каждое слагаемое инвариантным, причем на расслоении ξ_1 преобразование τ^2 тождественно, а на ξ_2 равно -1 . Пусть $p: \xi \rightarrow \xi$ — проекция на слагаемое ξ_1 . Тогда оператор p коммутирует с преобразованием τ^2 , а следовательно, и с преобразованием τ . Значит, преобразование τ оставляет инвариантными слагаемые ξ_1 и ξ_2 , т.е. разлагается в прямую сумму преобразований: $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$. При этом $\tau_1^2 = 1$, $\tau_2^2 = -1$. Следовательно, расслоение ξ_1 является комплексификацией вещественного расслоения, а ξ_2 является симплектическим расслоением.

Таким образом, множество вещественных и симплектических расслоений включается в категорию нового класса расслоений. Рассмотрим пространство X с инволюцией σ и комплексное векторное расслоение $p: E \rightarrow X$. Пусть $\tau: E \rightarrow E$ — такое отображение, что

- а) $\tau^4 = 1$;
- б) $\sigma p = p\tau$;
- в) $\tau: E_x \rightarrow E_{\tau x}$ является линейным антикомплексным отображением.

Другими словами, в тотальном пространстве E и базе X действует группа Z_4 , причем образующий элемент группы Z_4 действует в пространстве E как антикомплексное преобразование, квадрат образующей тождествен на базе X , а проекция $p: E \rightarrow X$ является эквивариантным отображением. Такое расслоение назовем *KRS-расслоением*.

Л е м м а 2. *Всякое KRS-расслоение ξ однозначно разлагается в эквивариантную прямую сумму двух комплексных подрасслоений: $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, причем в слагаемом ξ_1 имеет место равенство $\tau^2 = 1$, а в слагаемом ξ_2 — равенство $\tau^2 = -1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование τ^2 оставляет каждый слой расслоения на месте. Поскольку преобразование τ^2 уже сохраняет комплексную структуру, то расслоение ξ разлагается в искомую прямую сумму: $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, где $\tau^2|_{\xi_1} = 1$, $\tau^2|_{\xi_2} = -1$. Если $y \in \xi_1$ — произвольный вектор из первого слагаемого, то $\tau^2(\tau y) = \tau(\tau^2 y) = \tau y$, т.е. $\tau y \in \xi_1$. Аналогично, если $y \in \xi_2$, то $\tau^2(\tau y) = \tau(\tau^2 y) = -\tau y$, т.е. $\tau y \in \xi_2$. Таким образом, преобразование τ оставляет слагаемые ξ_1 и ξ_2 инвариантными, что и требовалось доказать.

Группу Гротендика, порожденную всеми KRS -расслоениями, обозначим через $KRS(X)$. Лемма 2, таким образом, утверждает, что группа $KRS(X)$ разлагается в прямую сумму двух слагаемых:

$$KRS(X) = KRS_0(X) \oplus KRS_1(X), \quad (23)$$

где $KRS_0(X)$ — группа, порожденная всеми KRS -расслоениями, для которых $\tau^2 = 1$, а $KRS_1(X)$ — группа, порожденная всеми KRS -расслоениями, для которых $\tau^2 = -1$. Очевидно, что $KRS_0(X) = KR(X)$. Поэтому

$$KRS(X) = KR(X) \oplus KRS_1(X). \quad (24)$$

В частности, если на пространстве X инволюция действует тривиально, то $KR(X) = K_O(X)$, а $KRS_1(X) = K_{Sp}(X)$, и мы получаем формулу

$$KRS(X) = K_O(X) \oplus K_{Sp}(X), \quad (25)$$

где через $K_{Sp}(X)$ обозначена группа Гротендика симплектических векторных расслоений.

Разложение (23) образует в группе $KRS(X)$ дополнительную Z_2 -градуировку. Относительно этой градуировки операция тензорного умножения KRS -расслоений превращает группу $KRS(X)$ в градуированное кольцо. В самом деле, если $\xi_1, \xi_2 \in KRS_0(X)$, то $\xi_1 \otimes \xi_2 \in KRS_0(X)$. Если же $\xi_1, \xi_2 \in KRS_1(X)$, то расслоение $\xi_1 \otimes \xi_2$ принадлежит уже группе $KRS_0(X)$, поскольку действие преобразования $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ удовлетворяет условию

$$\tau^2 = \tau_1^2 \otimes \tau_2^2 = (-1) \otimes (-1) = 1 \otimes 1 = 1.$$

Наконец, если $\xi_1 \in KRS_0(X)$, а $\xi_2 \in KRS_1(X)$, то $\xi_1 \otimes \xi_2 \in KRS_1(X)$.

Операция тензорного умножения в группе $KRS(X) = KRS_0(X) \oplus KRS_1(X)$ в случае тривиального действия инволюции в базе X переходит в известные операции тензорного умножения вещественного расслоения ξ_1 и симплектического расслоения ξ_2 : $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (c\xi_1) \otimes \xi_2$, в результате чего снова получается симплектическое расслоение. При тензорном умножении двух симплектических расслоений (над полем комплексных чисел) ξ_1 и ξ_2 : $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \xi_1 \otimes \xi_2$ получается комплексификация некоторого вещественного расслоения: $\xi_1 \otimes \xi_2 = c(\eta)$.

Стандартным образом определяются группы $KRS^{p,q}(X, Y) = KRS_0^{p,q}(X, Y) \oplus KRS_1^{p,q}(X, Y)$:

$$KRS^{p,q}(X, Y) = KRS(D^{p,q} \times X, (S^{p,q} \times X) \cup (D^{p,q} \times Y)),$$

где $KRS(X, Y) = \widetilde{KRS}(X/Y) = \text{Ker}(KRS(X/Y) \rightarrow KRS(\text{pt}))$.

На случай KRS -групп обобщается и периодичность Ботта. Именно, пусть

$$\beta \in KR(D^{1,1}, S^{1,1}) = KR^{1,1}(\text{pt}) = KRS_0^{1,1}(\text{pt})$$

— элемент, определяемый разностной конструкцией (15).

Теорема 1'. Гомоморфизм

$$\beta: KRS^{p,q}(X, Y) \rightarrow KRS^{p+1,q+1}(X, Y) \quad (26)$$

умножения на элемент β является изоморфизмом.

В гомоморфизме (26) новым по сравнению с гомоморфизмом (16) является гомоморфизм дополнительных слагаемых

$$\beta: KRS_1^{p,q} \rightarrow KRS_1^{p+1,q+1}(X, Y). \quad (27)$$

Доказательство теоремы 1' предоставляем читателям.

Теорема 2 тоже обобщается на случай KRS -расслоений.

Теорема 2'. Существует элемент

$$\gamma \in KRS_1^{0,4}(\text{pt}) = KRS_1(D^{0,4}, S^{0,4}),$$

умножение на который определяет изоморфизм

$$\gamma: KRS^{p,q}(X, Y) \rightarrow KRS^{p,q+4}(X, Y), \quad (28)$$

или

$$\gamma: KRS_0^{p,q}(X, Y) \rightarrow KRS_1^{p,q+4}(X, Y), \quad (29)$$

$$\gamma: KRS_1^{p,q}(X, Y) \rightarrow KRS_0^{p,q+4}(X, Y). \quad (30)$$

Квадрат элемента γ равен α :

$$\alpha = \gamma^2 \in KRS_0^{0,8}(\text{pt}) = KR^{0,8}(\text{pt}) = K_0^{-8}(\text{pt}).$$

В случае тривиальной инволюции в базе X теорема 2' утверждает, что существует такой элемент

$$\gamma \in K_{Sp}^{-4}(\text{pt}) = KRS_1^{0,4}(\text{pt}),$$

что гомоморфизм умножения на γ является изоморфизмом. В частности, изоморфны следующие группы:

$$\gamma: K_O^q(X) \approx K_{Sp}^{q-4}(X), \quad (31)$$

$$\gamma: K_{Sp}^q(X) \approx K_O^{q-4}(X). \quad (32)$$

Приведем таблицу групп K_O и K_{Sp} для одноточечного пространства (рис. 14).

На рис. 14 элемент $u \in K_{Sp}^0 = KRS_1^{0,0}$ представлен одномерным симплектическим расслоением над точкой, т.е. пространством $Q^1 = \mathbb{C}^2$. Тензорное произведение u^2 представляется пространством $Q^1 \otimes Q^1 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$. Это значит, что $u^2 = 4 \cdot 1$. Отсюда получается естественное объяснение, что квадрат образующей группы K_O^{-4} равен 4α , поскольку эта образующая имеет вид $u\gamma$ и, значит, $(u\gamma)^2 = u^2\gamma^2 = 4\gamma^2 = 4\alpha$.

Далее, группа $K_O^{-1}(\text{pt}) = K_O^0(S^1, \text{pt})$ может быть отождествлена с группой $\pi_0(O(n)) = \mathbb{Z}_2$. Поэтому элемент $h \in K_O^{-1}(\text{pt}) = K_O^0(S^1, \text{pt}) = KR^{0,0}(D^{0,1}, S^{0,1})$ может быть реализован в виде тройки (ξ_1, ψ, ξ_2) для пары пространств $(D^{0,1}, S^{0,1})$, где ξ_1, ξ_2 — одномерные (комплексные) тривиальные расслоения с естественной инволюцией, а изоморфизм $\psi: \xi_1|S^{0,1} \rightarrow \xi_2|S^{0,1}$ определяется как умножение на числа $\psi(1) = 1, \psi(-1) = -1$. Значит, элемент h можно представлять следующим образом. Пусть $\varphi_q: D^{0,q} \rightarrow D^{q,q}$ — естественное координатное вложение. Тогда

$$h = \varphi_1^*(\beta), \quad \beta \in KR(D^{1,1}, S^{1,1}), \quad (33)$$

где β — элемент Ботта. Очевидно, $h^2 = \varphi_2^*(\beta^2), h^3 = \varphi_3^*(\beta^3) \dots$ т.д.

q	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$K_0 = KRS_0$	\mathbb{Z} $\alpha = \gamma^2$	0	0	0	\mathbb{Z} $u\gamma$	0	\mathbb{Z}_2 h^2	\mathbb{Z}_2 h	\mathbb{Z} $u^2 = 4$
$K_{Sp} = KRS_1$	\mathbb{Z} $u\gamma^2$	0	\mathbb{Z}_2 $h^2\gamma$	\mathbb{Z}_2 $h\gamma$	\mathbb{Z} γ	0	0	0	\mathbb{Z} u

Рис. 14.

Перейдем к доказательству теорем 2 и 2'. Применим лемму 1, точнее, формулу (20) на случай KRS -теории. Получаем следующий изоморфизм:

$$KRS^{p,q}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) \xrightarrow{\mu^*} KRS^{p-4,q+4}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}).$$

Поскольку изоморфизм μ^* индуцируется гомеоморфизмом (17), он коммутирует с гомоморфизмом Ботта. Рассмотрим случай одноточечного пространства X . Имеем следующий изоморфизм:

$$KRS^{0,0}(S^{4,0}) \xrightarrow{\beta^4} KRS^{4,4}(S^{4,0}) \xrightarrow{\mu^*} KRS^{0,8}(S^{4,0}). \quad (34)$$

Положим $\alpha^* = \mu^* \beta^4 (1)$. Совершенно ясно, что изоморфизм

$$KRS^{p,q}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) \xrightarrow{\mu^* \beta^4} KRS^{p,q+8}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) \quad (35)$$

порождается операцией умножения на элемент $\alpha^* \in KRS^{0,8}(S^{4,0})$.

Л е м м а 3. Точная последовательность пары $(D^{t,0}, S^{t,0})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow KRS^{p,q-t}(X, Y) \xrightarrow{\chi} KRS^{p,q}(X, Y) \xrightarrow{j^*} \\ &\xrightarrow{j^*} KRS^{p,q}(X \times S^{t,0}, Y \times S^{t,0}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (36)$$

где χ есть умножение на элемент $(-h)^t$, а элемент h определяется формулой (33).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гомоморфизм χ в последовательности (36) есть композиция

$$KRS^{p,q-t}(X, Y) \xrightarrow{\beta^t} KRS^{p+t,q}(X, Y) \xrightarrow{\psi} KRS^{p,q}(X, Y),$$

где ψ индуцирован вложением $D^{p,q} \subset D^{p+t,q}$. Поэтому гомоморфизм χ есть умножение на образ единицы при гомоморфизме

$$KRS^{0,0}(\text{pt}) \xrightarrow{\beta^t} KRS^{t,t}(\text{pt}) \xrightarrow{\psi} KRS^{0,t}(\text{pt}) \quad (37)$$

с точностью до перестановки сомножителей в пространстве $D^{t,t} \approx D^{0,t} \times D^{t,0}$. Образ же единицы при гомоморфизме (37) как раз и есть элемент h .

Л е м м а 4. Пусть $h \in KR^{0,1}(\text{pt})$ — элемент, определяемый равенством (33). Тогда $h^3 = 0$.

Л е м м а 5. Пусть $j: S^{4,0} \rightarrow D^{4,0}$ — естественное вложение. Тогда существует такой элемент $\alpha \in KRS^{0,8}(\text{pt})$, что $j^*(\alpha) = \alpha^* \in KRS^{0,8}(S^{4,0})$.

Л е м м а 6. Существует элемент $\gamma \in KRS_1^{0,4}(\text{pt})$ такой, что $\gamma^2 = \alpha$.

Закончим теперь доказательство теорем 2 и 2'. Согласно леммам 3 и 4 гомоморфизм

$$j^*: KRS^{p,q}(X, Y) \rightarrow KRS^{p,q}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0})$$

является мономорфизмом. Согласно лемме 5 получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} KRS^{p,q}(X, Y) & \xrightarrow{j^*} & KRS^{p,q}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha^* \\ KRS^{p,q+8}(X, Y) & \xrightarrow{j^*} & KRS^{p,q+8}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) \end{array} \quad (38)$$

В частности, взяв в качестве X одноточечное пространство, получим ком-

мутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} KRS^{0,0}(pt) & \xrightarrow{j^*} & KRS^{0,0}(S^{4,0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KRS^{0,8}(pt) & \xrightarrow{j^*} & KRS^{0,8}(S^{4,0}) \end{array} \quad (39)$$

Пусть $\bar{1} \in KRS^{0,0}(S^{4,0})$ — единичный элемент, $\bar{1} = j^*(1)$. Тогда $\bar{1} \cdot \alpha = j^*(1)\alpha = j^*(1\alpha) = j^*(\alpha) = \alpha^*$. Таким образом, гомоморфизм умножения на элемент α^* совпадает с гомоморфизмом умножения на элемент α . Рассмотрим точную последовательность (36) пары $(D^{4,0}, S^{4,0})$. Гомоморфизм умножения на элемент α отображает последовательность (36) в себя таким образом, что получается следующая коммутативная диаграмма, дополняющая диаграмму (38):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & KRS^{p,q}(X,Y) & \longrightarrow & KRS^{p,q}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) & \longrightarrow & KRS^{p,q-5}(X,Y) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & KRS^{p,q+8}(X,Y) & \longrightarrow & KRS^{p,q+8}(X \times S^{4,0}, Y \times S^{4,0}) & \longrightarrow & KRS^{p,q+3}(X,Y) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (40)$$

Поскольку гомоморфизм α^* является изоморфизмом (см. (35)), то вертикальный левый гомоморфизм является мономорфизмом, а вертикальный правый гомоморфизм является эпиморфизмом. Индексы групп для левого вертикального гомоморфизма могут быть произвольными, $p \geq 0$, $q \geq 0$. Значит, в случае левого вертикального гомоморфизма тоже выполняются неравенства $p \geq 0$, $q - 5 \geq 0$. Следовательно, гомоморфизм α является изоморфизмом для любых $p, q \geq 0$, что и требовалось доказать в теореме 2.

Наконец, если $\alpha = \gamma^2$, то гомоморфизм умножения на элемент γ тоже является изоморфизмом, что и утверждается в теореме 2.

Итак, для завершения доказательства теорем 2 и 2' необходимо доказать леммы 4–6, которые описывают свойства KRS -теории для некоторых специальных пространств.

Доказательство леммы 4. Элемент $h \in KR^{0,1}(pt) = KR^{0,0}(D^{0,1}, S^{0,1})$ задается тройкой (ξ_1, d, ξ_2) , где ξ_1, ξ_2 — тривиальные одномерные (вещественные) векторные расслоения над базой $D^{0,1} = [-1, 1]$, а d — гомоморфизм, задаваемый в точке $x \in [-1, 1]$ как умножение на число x . Полезно считать, что тройка (ξ_1, d, ξ_2) задана над большей базой $R^{0,1} = (-\infty, \infty)$ — вещественной осью с тем же самым гомоморфизмом d . Тогда гомоморфизм d является изоморфизмом в слоях над точками $x \neq 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. Третья тензорная степень элемента h определяется согласно формулам (30) — (32) из § 1 разностной конструкцией

$$0 \longrightarrow \eta_1 \xrightarrow{d_1} \eta_2 \xrightarrow{d_2} \eta_3 \xrightarrow{d_3} \eta_4 \longrightarrow 0, \quad (41)$$

в которой η_1, η_4 — одномерные тривиальные расслоения, η_2, η_3 — трехмерные тривиальные расслоения над базой $R^{0,3}$, а гомоморфизмы d_1, d_2, d_3 задаются матрицами

$$d_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где x, y, z — декартовы координаты в пространстве $R^{0,3}$. Очевидно, что ком-

плекс (41) точен, если $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, поэтому он задает элемент $h^3 \in KR^{0,0}(D^{0,3}, S^{0,3})$. Гомоморфизмы d_1, d_2, d_3 имеют простое геометрическое описание в точках двумерной сферы $\nu \in S^{0,3}$. Гомоморфизм d_1 является отображением базисного вектора в нормальный вектор к сфере $S^{0,3}$ в точке ν , т.е. в вектор ν . Гомоморфизм d_2 есть операция векторного умножения векторов из $R^{0,3}$ на вектор ν . Гомоморфизм d_3 есть ортогональная проекция пространства на нормальный вектор ν и затем отображение в базисный вектор. Тривиальные расслоения $\eta_2 = \eta_3$ разлагаются в прямую сумму:

$$\eta_2 = \eta_3 = TS^{0,3} \oplus \nu(S^{0,3}),$$

где $TS^{0,3}$ — касательное расслоение, а $\nu(S^{0,3})$ — нормальное расслоение к сфере $S^{0,3}$ в пространстве $R^{0,3}$. Таким образом, гомоморфизм d_2 отображает слагаемое $TS^{0,3}$ в себя, поворачивая каждый вектор на 90° по часовой стрелке, если смотреть на касательную плоскость с конца нормального вектора ν . Второе слагаемое $\nu(S^{0,3})$ гомоморфизм d_2 отображает в нулевой вектор. Поэтому существует непрерывная гомотопия $d_{2,\varphi}$, оставляющая комплекс (41) точным, где $d_{2,\varphi}$ есть операция поворота касательной плоскости на угол φ , причем нормальный вектор отображается гомоморфизмом $d_{2,\varphi}$ в нуль. Тогда $d_{2,\pi/2} = d_2$, $d_{2,0}$ — тождественный гомоморфизм. Комплекс (41) распался в сумму трех комплексов над $S^{0,3}$:

$$0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \nu(S^{0,3}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad (43)$$

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow TS^{0,3} \rightarrow TS^{0,3} \rightarrow 0 \rightarrow 0, \quad (44)$$

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \nu(S^{0,3}) \rightarrow \eta_4 \rightarrow 0. \quad (45)$$

Прибавим к комплексу (41) тривиальный комплекс

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \bar{1} \rightarrow \bar{1} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

и над сферой $S^{0,3}$ произведем поворот в расслоении $\nu(S^{0,3}) \oplus \bar{1}$ на 90° . В результате такого поворота гомоморфизмы изменятся на гомотопные, и комплекс распадается в сумму трех комплексов:

$$0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \bar{1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \nu(S^{0,3}) \oplus TS^{0,3} \rightarrow \nu(S^{0,3}) \oplus TS^{0,3} \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \bar{1} \rightarrow \eta_4 \rightarrow 0,$$

каждый из которых определяет в группе $KR^{0,0}(D^{0,3}, S^{0,3})$ нулевой элемент. Лемма 4 доказана.

Перейдем теперь к доказательству лемм 5 и 6. Рассмотрим пару $(S^{p,0}, S^{q,0})$, $q < p$. Факторпространство $S^{p,0}/S^{q,0}$ можно представить как одноточечную компактификацию разности $S^{p,0} \setminus S^{q,0}$, которая в свою очередь гомеоморфна пространству $S^{p-q,0} \times R^{q,0}$. Значит,

$$S^{p,0}/S^{q,0} \approx (S^{p-q,0} \times D^{q,0}) / (S^{p-q,0} \times S^{q,0}).$$

Поэтому имеем равенство

$$KRS^{s,t}(S^{p,0}, S^{q,0}) = KRS^{s+q,t}(S^{q,0}). \quad (46)$$

Изоморфизм (46) используем в точных последовательностях для следующих двух пар: $(S^{4,0}, S^{1,0})$ и $(S^{4,0}, S^{3,0})$. Имеем

$$\dots \rightarrow KRS^{p,q}(S^{4,0}, S^{1,0}) \rightarrow KRS^{p,q}(S^{4,0}) \rightarrow KRS^{p,q}(S^{1,0}) \rightarrow \dots, \quad (47)$$

$$\dots \rightarrow KRS^{p,q}(S^{4,0}, S^{3,0}) \rightarrow KRS^{p,q}(S^{4,0}) \rightarrow KRS^{p,q}(S^{3,0}) \rightarrow \dots \quad (48)$$

Вспоминаем, что $KRS_0^{p,q}(S^{1,0}) = K_U^{p+q}(\text{pt})$. Аналогичным образом, $KRS_1^{p,q}(S^{1,0}) = K_U^{p+q}(\text{pt})$. Следовательно, при $p = 0$ и четном q получим следующие точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{3,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{4,0}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow KRS_i^{0,q-2}(S^{3,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{4,0}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{4,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{3,0}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{4,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{3,0}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Напишем еще три аналогичные точные последовательности для пар $(S^{3,0}, S^{1,0})$, $(S^{3,0}, S^{2,0})$ и $(S^{2,0}, S^{1,0})$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{2,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{3,0}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow KRS_i^{0,q-2}(S^{2,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{3,0}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow KRS_i^{0,q+1}(S^{3,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q+1}(S^{2,0}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{3,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{2,0}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$0 \rightarrow KRS_i^{0,q}(S^{2,0}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z} \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(S^{2,0}) \rightarrow 0. \quad (53)$$

Гомоморфизм $\nu: KRS_i^{0,q}(S^{1,0}) \rightarrow KRS_i^{1,q-1}(S^{1,0})$ имеет геометрический смысл. Этот гомоморфизм индуцируется отображением $S^{2,0}/S^{1,0} \rightarrow \Sigma^{0,1}(S^{1,0})$, где через $\Sigma^{0,1}$ обозначена надстройка над пространством. Поэтому $\nu(x) = x \pm x^*$. Пусть $\beta \in K_U^{-2}(\text{pt})$ — образующий элемент. Тогда $\beta^* = -\beta$. Значит, если $x \in K_U^{-2q}(\text{pt})$, то $x^* = (-1)^q x$ и $\nu(x) = x(1 \pm (-1)^q)$. Если $q = 0$, то из точной последовательности (52) следует, что $\nu = 0$. Поэтому в общем случае $\nu(x) = x(1 - (-1)^q)$. Следовательно, $\nu = 0$ при четных и $\nu = 2$ при нечетных q . Из (53) получаем полный список групп:

$$\begin{aligned} KRS_i^{0,0}(S^{2,0}) = \mathbb{Z}, \quad KRS_i^{0,-1}(S^{2,0}) = \mathbb{Z}, \\ KRS_i^{0,-2}(S^{2,0}) = 0, \quad KRS_i^{0,-3}(S^{2,0}) = \mathbb{Z}_2, \\ KRS_i^{0,q}(S^{2,0}) = KRS_i^{0,q+4}(S^{2,0}). \end{aligned} \quad (54)$$

Из (51), (52), учитывая данные (54), получаем список

$$\begin{aligned} KRS_i^{0,0}(S^{3,0}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad KRS_i^{0,-1}(S^{3,0}) = 0, \\ KRS_i^{0,-2}(S^{3,0}) = \mathbb{Z}_2, \quad KRS_i^{0,-3}(S^{3,0}) = \mathbb{Z}_2, \\ KRS_i^{0,q}(S^{3,0}) = KRS_i^{0,q+4}(S^{3,0}). \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая данные (55), из точных последовательностей (49) и (50) получаем список

$$\begin{aligned} KRS_i^{0,0}(S^{4,0}) = \mathbb{Z}, \quad KRS_i^{0,-1}(S^{4,0}) = \mathbb{Z}_2 \text{ или } 0, \\ KRS_i^{0,-2}(S^{4,0}) = \mathbb{Z}_2, \quad KRS_i^{0,-3}(S^{4,0}) = \mathbb{Z} \text{ или } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \\ KRS_i^{0,q}(S^{4,0}) = KRS_i^{0,q+4}(S^{4,0}) \end{aligned} \quad (56)$$

по модулю указанной неоднозначности.

Наконец, применим последовательность (36) при $t = 4$ и $t = 1$. Поскольку $\chi = 0$, имеем при $t = 4$:

$$0 \rightarrow KRS_i^{0,q}(\text{pt}) \xrightarrow{j^*} KRS_i^{0,q}(S^{4,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-5}(\text{pt}) \rightarrow 0. \quad (57)$$

Последовательность (36) при $t = 1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \rightarrow KRS_i^{0,q+1}(S^{1,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-1}(\text{pt}) \xrightarrow{\chi} KRS_i^{0,q}(S^{1,0}) \xrightarrow{j^*} \\ & \xrightarrow{j^*} KRS_i^{0,q}(S^{1,0}) \rightarrow KRS_i^{0,q-2}(\text{pt}) \rightarrow. \end{aligned} \quad (58)$$

При этом члены $KRS_i^{0,q}(S^{1,0})$ совпадают с группами $K_U^q(\text{pt})$ комплексной K -теории, а гомоморфизм j^* совпадает с операцией комплексификации вещественных (при $i = 0$) и симплектических (при $i = 1$) расслоений. Группа $KRS_0^{0,1}(\text{pt})$ совпадает с группой $K_O(S^1, \text{pt})$, которая порождается единственным элементом h порядка 2, значит, $KRS_0^{0,1}(\text{pt}) = \mathbb{Z}_2$. Тогда при $q = 2$ из точной последовательности (58) получаем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\chi} KRS_0^{0,2}(\text{pt}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (59)$$

поэтому гомоморфизм χ является изоморфизмом. Это значит, что $KRS_0^{0,2}(\text{pt}) = \mathbb{Z}_2$, а образующая этой группы равна h^2 .

При $q = 3$ из точной последовательности (58) получаем следующую точную последовательность:

$$\mathbb{Z} \rightarrow KRS_0^{0,2}(\text{pt}) \xrightarrow{\chi} KRS_0^{0,3}(\text{pt}) \rightarrow 0. \quad (60)$$

Поскольку $\chi(h^2) = h^3 = 0$, то $\chi = 0$. Отсюда $KRS_0^{0,3}(\text{pt}) = 0$. Применим последнее равенство к последовательности (57) при $q = 8$:

$$0 \rightarrow KRS_i^{0,8}(\text{pt}) \xrightarrow{j^*} KRS_i^{0,8}(S^{4,0}) \rightarrow KRS_i^{0,3}(\text{pt}) \rightarrow 0. \quad (61)$$

Мы получаем, что гомоморфизм j_* в последовательности (61) является изоморфизмом. Таким образом, лемма 5 полностью доказана.

Рассмотрим теперь точную последовательность (58) при $i = 4$ и $q = 4$:

$$0 \rightarrow KRS_1^{0,4}(\text{pt}) \xrightarrow{j^*} K_U^{-4}(\text{pt}) \rightarrow KRS_1^{0,2}(\text{pt}). \quad (62)$$

Группа $KRS_1^{0,2}(\text{pt})$ изоморфна группе симплектических расслоений над двумерной сферой S^2 по модулю отмеченной точки. Согласно классифицирующим теоремам (§ 3 главы 2) эта группа изоморфна гомотопической группе $\pi_2(B_{Sp(n)}) = 0$ (пример 6 § 2 главы 2). Значит, вложение j^* из последовательности (62) является мономорфизмом. Обозначим образующую группы $KRS_1^{0,4}(\text{pt})$ через γ . Тогда $j^*(\gamma) = \beta^2 \in K_U^{-4}(\text{pt})$. Далее, при $q = 8$ и $i = 0$ из последовательности (58) получаем точную последовательность

$$KRS_0^{0,8}(\text{pt}) \xrightarrow{j^*} K_U^{-8}(\text{pt}) \rightarrow KRS_0^{0,6}(\text{pt}). \quad (63)$$

Пусть $\alpha \in KRS_0^{0,8}(\text{pt})$ — образующий элемент, $\gamma^2 = \lambda\alpha$. Тогда

$$j^*(\gamma^2) = (j^*(\gamma))^2 = \beta^4 = j^*(\lambda\alpha) = \lambda j^*(\alpha).$$

Значит, $\lambda = \pm 1$, поэтому при подходящем выборе знака у элемента α мы получаем утверждение леммы 6.

Этим завершается доказательство теорем 2 и 2'.

Читателям предлагается самостоятельно определить недостающие группы из таблицы на рис. 14.

В этой главе мы изложим несколько приемов, с помощью которых описание K -групп различных конкретных пространств сводится к описанию обычных (целочисленных) когомологий пространств. К этим приемам относятся спектральная последовательность, когомологические операции в K -теории, конструкция прямого образа. Все эти приемы ни в коей мере не являются универсальными, но с их помощью удастся в конкретных примерах наиболее полно и выпукло использовать геометрические особенности тех или иных топологических пространств и многообразий.

На протяжении всей главы будет рассматриваться комплексная K -теория.

§ 1. Спектральная последовательность

Как и в случае классических теорий когомологий, спектральная последовательность в K -теории строится по некоторой фильтрации пространства X . Конструкция спектральной последовательности, описанная ниже, применима не только к K -теории, но и к произвольной обобщенной теории когомологий, и восходит к Масси. Итак, пусть

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X \quad (1)$$

— некоторая возрастающая фильтрация пространства X . Положим

$$D = \bigoplus_{p,q} D^{p,q} = \bigoplus_{p,q} K^{p+q}(X_p), \quad (2)$$

$$E = \bigoplus_{p,q} E^{p,q} = \bigoplus_{p,q} K^{p+q}(X_p, X_{p-1}).$$

Рассмотрим точную последовательность пары (X_p, X_{p-1}) :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow K^{p-1+q}(X_{p-1}) \xrightarrow{\partial} K^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{j} \\ \xrightarrow{j} K^{p+q}(X_p) \xrightarrow{i^*} K^{p-1+q+1}(X_{p-1}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Если мы просуммируем последовательность (3) по всем p и q , то получим следующую точную последовательность:

$$\dots \rightarrow \bigoplus D^{p-1,q} \xrightarrow{\partial} \bigoplus E^{p,q} \xrightarrow{j^*} \bigoplus D^{p,q} \xrightarrow{i^*} \bigoplus D^{p-1,q+1} \rightarrow \dots, \quad (4)$$

или, более кратко,

$$\dots \rightarrow D \xrightarrow{\partial} E \xrightarrow{j^*} D \xrightarrow{i^*} D \xrightarrow{\partial} \dots, \quad (5)$$

где бистепени гомоморфизмов ∂, j^* и i^* соответственно равны

$$\deg i^* = (-1, 1), \deg j^* = (0, 0), \deg \partial = (1, 0).$$

Последовательность (5) может быть записана в виде точного треугольника

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i^*} & D \\ & \searrow j^* & \swarrow \partial \\ & E & \end{array}$$

Положим $d = \partial j^*: E \rightarrow E$. Бистепень гомоморфизма d равна

$$\deg d = (1, 0).$$

Очевидно, что $d^2 = \partial j^* \partial j^* = 0$. Положим $D_1 = D, E_1 = E, i_1 = i^*, j_1 = j^*, \partial_1 = \partial, d_1 = d$ и, далее,

$$D_2 = i_1(D_1) \subset D_1, \quad (7)$$

$$E_2 = H(E_1, d_1). \quad (8)$$

Градуировку в группе D_2 наследуем из градуировки образа, т.е.

$$D_2 = \oplus D_2^{p,q}, \quad D_2^{p,q} = i_1(D_1^{p+1,q-1}). \quad (9)$$

Градуировка в группе E_2 наследуется из градуировки группы E_1 , т.е. положим $E_2 = \oplus E_2^{p,q}$,

$$E_2^{p,q} = \text{Ker}(E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}) / \text{Im}(E_1^{p-1,q} \rightarrow E_1^{p,q}). \quad (10)$$

Пусть, далее,

$$i_2 = i_1|_{D_2}: D_2 \rightarrow D_2, \quad (11)$$

$$\partial_2 = \partial_1 i_1^{-1}, \quad (12)$$

$$j_2 = j_1. \quad (13)$$

Формулы (11) — (13) имеют следующий смысл: если $x \in D_2$, то $i_1(x) \in D_2$. Если $x \in D$, то $x = j_1(y)$. Положим тогда $\partial_2(x) = [\partial_1(y)] \in H(E_1, d_1)$. Последнее включение вытекает из равенства $d_1 \partial_1(y) = \partial_1 j_1 \partial_1(y) = 0$. Если же $i_1(y) = 0$, то в силу точности треугольника (6) получаем, что $y = j_1(z)$. Тогда $\partial_2(x) = [\partial_1 j_1(z)] = [d_1(z)] = 0$. Таким образом, определение гомоморфизма ∂_2 , даваемое формулой (12), корректно. Наконец, если $x \in E_1, d_1(x) = 0$, то $\partial_1 j_1(x) = 0$. Тогда в силу точности треугольника (6) получаем, что $j_1(x) = i^*(z) \in D_2$. Если же $x = d_1(y), x = \partial_1 j_1(y)$, то $j_1(x) = j_1 \partial_1 j_1(y) = 0$. Значит, определение гомоморфизма j_2 формулой (13) тоже корректно. Таким образом, формулы (7) — (13) задают новый точный треугольник

$$\begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{i_2} & D_2 \\ & \searrow j_2 & \swarrow \partial_2 \\ & E_2 & \end{array}$$

(14)

называемый треугольником, производным от треугольника (6). Доказательство точности треугольника (14) предоставим читателю.

Выпишем бистепени гомоморфизмов i_2, ∂_2, j_2 и $d_2 = \partial_2 j_2$:

$$\deg i_2 = (-1, 1), \quad \deg j_2 = (0, 0),$$

$$\deg \partial_2 = (2, -1), \quad \deg \partial_2 = (2, -1).$$

Повторяя процесс построения производных треугольников многократно, получим последовательность точных треугольников

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{i_n} & D_n \\ & \searrow j_n \quad \swarrow \partial_n & \\ & E_n & \end{array}$$

(15)

причем бистепени гомоморфизмов i_n, j_n, ∂_n и $d_n = \partial_n j_n$ равны

$$\deg i_n = (-1, 1), \quad \deg j_n = (0, 0),$$

$$\deg \partial_n = (n, -(n-1)), \quad \deg d_n = (n, -(n-1)).$$

Последовательность

$$(E_n, d_n) \tag{16}$$

называется *спектральной последовательностью* в K -теории, ассоциированной с фильтрацией (1) пространства X .

Т е о р е м а 1. *Спектральная последовательность (16) сходится к группам, присоединенным к группам $K^*(X)$ относительно фильтрации в пространстве X .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (2) при $p > N$ имеют место равенства $E_1^{p,q} = 0$. Это значит, что $d_n = 0$ при $n > N$, т.е. $E_n^{p,q} = E_{n+1}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}$. Из определения групп D_n следует, что

$$D_n^{p,q} = \text{Im}(K^{p+q}(X_{p+n}) \rightarrow K^{p+q}(X_p)).$$

Значит, если $n > N$, то

$$D_n^{p,q} = \text{Im}(K^{p+q}(X) \rightarrow K^{p+q}(X_p)). \tag{17}$$

Следовательно, гомоморфизм $i_n: D_n^{p,q} \rightarrow D_n^{p-1,q+1}$ является эпиморфизмом для любых значений индексов p и q .

Таким образом, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow E_n^{p,q} \xrightarrow{j_n} D_n^{p,q} \xrightarrow{i_n} D_n^{p-1,q+1} \rightarrow 0. \tag{18}$$

Другими словами, $E_n^{p,q} = \text{Ker } i_n$. Из формулы (17) следует, что группа $D_n^{p,q}$ может быть представлена как факторгруппа:

$$D_n^{p,q} = K^{p+q}(X) / \text{Ker}(K^{p+q}(X) \rightarrow K^{p+q}(X_p)). \tag{19}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E_n^{p,q} &= \text{Ker } i_n = \text{Ker}(K^{p,q}(X) \rightarrow \\ &\rightarrow K^{p+q}(X_{p-1})) / \text{Ker}(K^{p+q}(X) \rightarrow K^{p+q}(X_p)), \end{aligned} \tag{20}$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ — локально тривиальное расслоение со слоем F и фундаментальная группа $\pi_1(X)$ тривиально действует в K -группах слоя F . Тогда спектральная последовательность в K -теории, ассоциированная с фильтрацией $Y_k = \pi^{-1}([X]^k)$, где $[X]^k$ — k -мерный остов клеточного пространства X , сходится к группам, присоединенным к группам $K^*(Y)$, а второй член имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(X, K^q(F)). \quad (21)$$

З а м е ч а н и е. Если $p: Y \rightarrow X$ — локально тривиальное расслоение со слоем F , то оно удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии. В случае, когда слой F является клеточным пространством, аксиому о накрывающей гомотопии можно применить к вложению слоя F в тотальное пространство Y . Пусть $i_0: F \rightarrow Y$ — такое вложение, что $pi_0(F) = x_0$. Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ — произвольный замкнутый путь, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Можно считать, что путь γ задает отображение декартова произведения

$$\gamma: F \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad \gamma(x, t) = \gamma(t).$$

Вложение i_0 , очевидно, накрывает отображение $\gamma_0(x) = \gamma(x, 0)$. Следовательно, существует отображение $i: F \times I \rightarrow Y$, накрывающее отображение γ . Если путь γ гомотопен пути γ' , то и накрытия i и i' гомотопны. Таким образом, получаем отображение

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow [F, F]$$

фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ в множество классов гомотопических эквивалентностей слоя F . В частности, это отображение задает действие группы $\pi_1(X, x_0)$ в группах $K^*(F)$.

С л е д с т в и е. Для клеточного пространства X спектральная последовательность в K -теории, ассоциированная с фильтрацией k -мерными остовами, сходится к группам, присоединенным к группам $K^*(X)$, а второй член имеет вид

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(X; \mathbb{Z}) & \text{при четном } q, \\ 0 & \text{при нечетном } q. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Член E_1 спектральной последовательности имеет вид

$$E_1^{p,q} = K^{p+q}(Y_p, Y_{p-1})$$

согласно формуле (2). Поскольку наше расслоение тривиально над каждой p -мерной клеткой σ_i^p , то $\pi^{-1}(\sigma_i^p) = \sigma_i^p \times F$. Поэтому пара (Y_p, Y_{p-1}) имеет такие же K -группы, что и объединение пар $\bigcup_i (\sigma_i^p \times F, \partial \sigma_i^p \times F)$, т.е.

$$E_1^{p,q} \approx \bigoplus_i K^{p+q}(\sigma_i^p \times F, \partial \sigma_i^p \times F) = \bigoplus_i K^q(F), \quad (22)$$

где суммирование производится по номеру i , нумерующему p -мерные клетки пространства X . Поэтому член $E_1^{p,q}$ можно отождествить с группой p -мерных коцепей пространства X :

$$E_1^{p,q} = C^p(X; K^q(F)) \quad (23)$$

с коэффициентами в группе $K^q(F)$.

Остается усмотреть, что дифференциал d_1 спектральной последовательности совпадает с кограничным гомоморфизмом в группе коцепей пространства X . Это совпадение следует из точной последовательности (3), и мы оставляем доказательство читателям в качестве упражнения. Заметим, что отождествление (23) возможно, только если фундаментальная группа базы X действует тривиальным образом в K -группах слоя F . В противном случае мы должны считать, что член $E_1^{p,q}$ изоморфен группе p -мерных коцепей с локальной системой коэффициентов, задаваемой действием фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в группе $K^q(F)$.

Следующее уточнение теоремы 2 мы тоже приведем без доказательства.

Скажем, что спектральная последовательность является *мультипликативной*, если выполнены следующие условия: группы $E_s = \bigoplus_{p,q} E_s^{p,q}$ являются биградуированными кольцами, дифференциал d_s является дифференцированием в кольце E_s , т.е.

$$d_s(xy) = (d_s x)y + (-1)^{p+q} x(d_s y), \quad (24)$$

где $x \in E_s^{p,q}$; кольцевая структура в гомологиях дифференциала d_s совпадает с кольцевой структурой в следующем члене E_{s+1} , изоморфизм (21) согласован с кольцевыми структурами в левой и правой частях, а кольцевая структура в кольце $K^*(Y)$ согласована с кольцевой структурой в члене E_∞ .

Т е о р е м а 2'. *Спектральная последовательность из теоремы 2 мультипликативна.*

Поясним теорему 2. Операция умножения в K -теории вводится с помощью тензорного умножения расслоений. Если ξ и η — два расслоения над базой X , то $\xi \otimes \eta$ образует расслоение над декартовым произведением $X \times X$. Если $\Delta: X \rightarrow X \times X$ — диагональное вложение, то получим операцию тензорного умножения в виде композиции

$$K(X) \otimes K(X) \rightarrow K(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} K(X). \quad (25)$$

Если X_p — p -мерный остов пространства X , то диагональное вложение гомо-

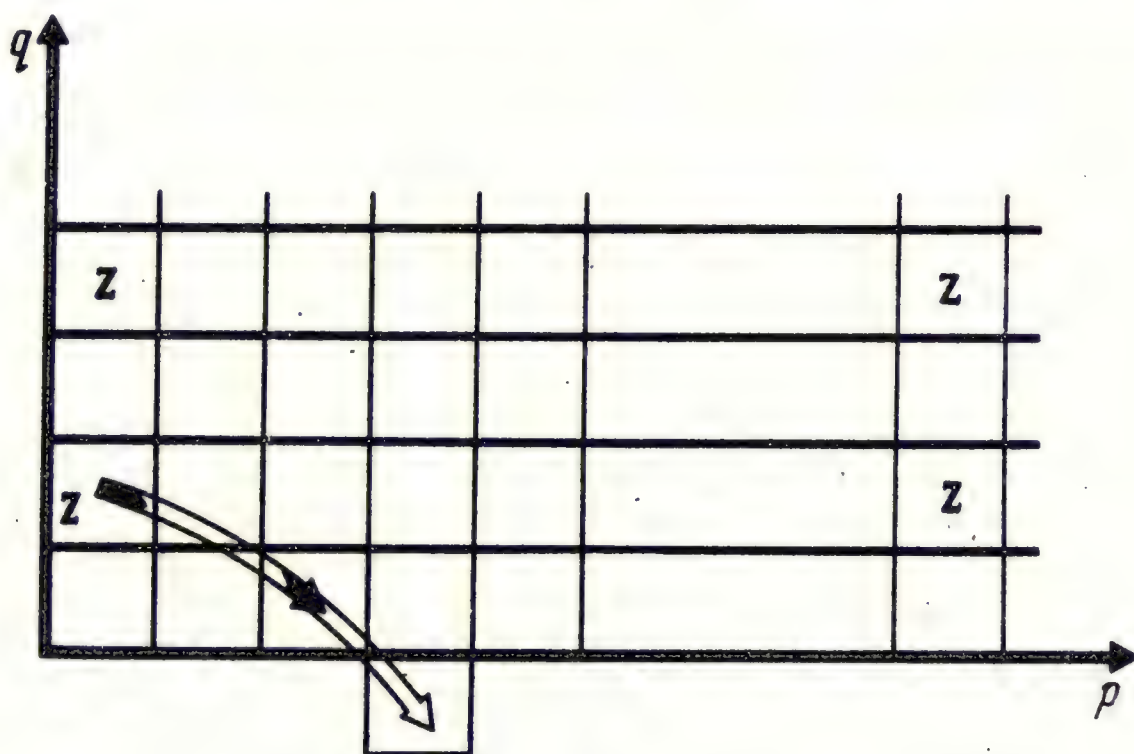


Рис. 15.

точно такому отображению $\tilde{\Delta}$, что $\tilde{\Delta}(X_p) \subset \bigcup_{\alpha+\beta=p} X_\alpha \times X_\beta$. При этом $\Delta = \tilde{\Delta}^*$. Тогда композиция (25) порождает отображение

$$K(X_p, X_{p-1}) \otimes K(X_{p'}, X_{p'-1}) \rightarrow K(X_{p+p'}, X_{p+p'-1}).$$

В самом деле, если $x \in K(X_p, X_{p-1})$, $y \in K(X_{p'}, X_{p'-1})$, то элемент $x \otimes y$ представляется разностной конструкцией на паре $(X_p \times X_{p'}, (X_{p-1} \times X_{p'})) \cup (X_p \times X_{p'-1})$, которая, очевидно, легко распространяется (тривиальным образом) на пару $(\bigcup_{\alpha+\beta=p+p'} (X_\alpha \times X_\beta), \bigcup_{\alpha+\beta=p+p'-1} (X_\alpha \times X_\beta))$. Далее, полагаем $xy = \tilde{\Delta}^*(x \otimes y)$. Аналогичное спаривание возникает

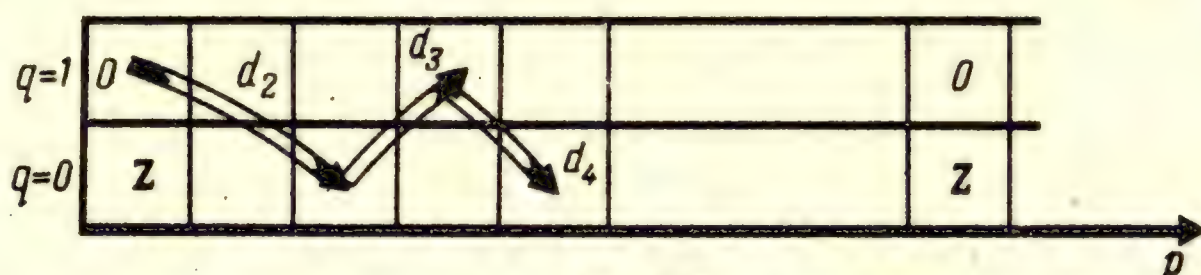


Рис. 16.

в члене E_1 спектральной последовательности для локально тривиального расслоения $\pi: Y \rightarrow X$.

С помощью спектральной последовательности (16) удобно вычислять K -группы различных конкретных пространств.

Примеры 1. Пусть $X = S^n$. Согласно следствию член E_2 спектральной последовательности имеет следующий вид:

$$E_2^{p,q} = H^p(S^n, K^q(*)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } p = 0, n \text{ и четном } q, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (\text{рис. 15}).$$

В силу периодичности комплексной K -теории достаточно рисовать только две строчки спектральной последовательности при $q = 0$ и 1 (рис. 16).

При $n = 0$ спектральная последовательность, очевидно, вырождается, т.е. $d_s = 0$, $E_2 = E_\infty$. Поскольку для точки $d_s = 0$, то и для любого пространства X имеем $d_s|_{E_s^{0,q}} = 0$. Это значит, что для сферы S^n все дифференциалы равны нулю, поэтому $E_2 = E_\infty$, и мы получаем

$$K^0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при четном } n, \\ \mathbb{Z} & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

$$K^1(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{при четном } n, \\ \mathbb{Z} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

2. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$. Тогда

$$E_2^{*,*} = H^*(\mathbb{C}P^n, K^*(pt)) = \mathbb{Z}[t]/\{t^{n+1} = 0\},$$

где $t \in E_2^{2,0} = H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ — образующий элемент. Таким образом, отличны от нуля только члены $E_2^{p,q}$ с четными значениями $p+q$. Значит, все дифференциалы равны нулю, и $E_\infty^{*,*} = \mathbb{Z}[t]/\{t^{n+1} = 0\}$ (рис. 17).

Следовательно, аддитивная структура групп $K(\mathbb{C}P^n)$ такая же, как и у члена E_∞ , поэтому $K^0(\mathbb{C}P^n) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n+1 \text{ раз}}, K^1(\mathbb{C}P^n) = 0$. Чтобы доказать,

что мультипликативная структура кольца $K(\mathbb{C}P^n)$ тоже совпадает с мультипликативной структурой члена E_∞ , рассмотрим элемент $u \in K(\mathbb{C}P^n)$, который равен нулю на одномерном остове и представляет элемент $t \in E_\infty^{2,0}$. Тогда квадрат u^2 может быть представлен в виде $\tilde{\Delta}^*(u \otimes u)$. При отображении $\tilde{\Delta}$ трехмерный остов X_3 отображается в объединение $\bigcup_{\alpha+\beta \leq 3} (X_\alpha \times X_\beta)$, т.е. если $\alpha \geq 2$, то $\beta \leq 3 - \alpha \leq 3 - 2 \leq 1$. Значит, элемент u^2 равен нулю на

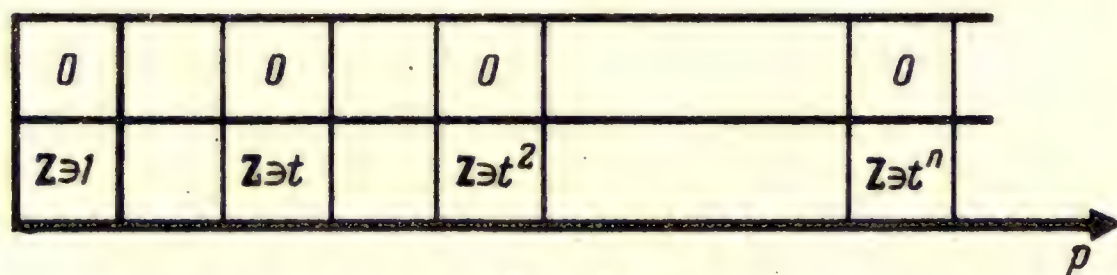


Рис. 17.

трехмерном остове и представляет элемент t^2 в члене $E_\infty^{4,0}$. Аналогично показывается, что элемент u^n представляет элемент $t^n \neq 0$, а элемент u^{n+1} равен нулю на остове $[\mathbb{C}P^n]^{2n+1}$, поэтому равен нулю на всем пространстве $\mathbb{C}P^n$. Таким образом, $K^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[u] / \{u^{n+1} = 0\}$. В качестве элемента u можно, например, взять элемент $u = [\xi] - 1$, где ξ — одномерное расслоение Хопфа.

3. Покажем, что все дифференциалы в спектральной последовательности в K -теории имеют конечный порядок. Для этого рассмотрим характер Черна

$$\text{ch}: K^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q}). \quad (26)$$

Преобразование (26) задает, очевидно, преобразование спектральных последовательностей

$$\text{ch}: E_s^{p,q} \rightarrow {}'E_s^{p,q}, \quad (27)$$

где $'E_s^{p,q}$ — спектральная последовательность для \mathbb{Z}_2 -градуированных когомологий пространства X с рациональными коэффициентами, соответствующая фильтрации по остовам пространства X . Поскольку $'E_2^{p,0} = H^p(X; \mathbb{Q})$, $'E_2^{p,1} = 0$, все дифференциалы d'_s этой спектральной последовательности тривиальны. С другой стороны, характер Черна становится изоморфизмом после тензорного умножения K -групп на поле \mathbb{Q} рациональных чисел. Значит,

$$d_s \otimes \mathbb{Q} = 0, \quad (28)$$

т.е. дифференциал d_s имеет конечный порядок в каждой группе $E_s^{p,q}$. Рассмотрим, например, дифференциал

$$d_2: E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1}, \quad (29)$$

или, в более конкретной записи,

$$d_2: H^p(X; K^q(\text{pt})) \rightarrow H^{p+2}(X; K^{q-1}(\text{pt})).$$

Поскольку или группа $K^q(\text{pt})$, или группа $K^{q-1}(\text{pt})$ тривиальна, имеет место равенство

$$d_2 = 0, \quad (30)$$

и поэтому $E_2^{p,q} = E_3^{p,q}$. Далее, дифференциал

$$d_3: E_3^{p,q} \rightarrow E_3^{p+3, q-2}$$

имеет вид стабильной когомологической операции

$$d_3: H^p(X; Z) \rightarrow H^{p+3}(X; Z), \quad (31)$$

т.е. $d_3 \in H^{p+3}(K(Z, p); Z)$. Поскольку $H^{p+3}(K(Z, p); Z) = Z_2$ с образующей Sq^3 , дифференциал d_3 имеет порядок не более чем два, а сам дифференциал d_3 равен нулю или операции Sq^3 .

Таким образом, если целочисленные когомологии пространства X не имеют кручения, то все дифференциалы спектральной последовательности в K -теории равны нулю, и потому $E_\infty^{p,q} = H^p(X, K^q(\text{pt}))$. Значит, группа $H^*(X; Z)$ присоединена к группе $K^*(X)$.

4. По аналогии с обычными когомологиями выведем формулу для K -групп декартова произведения пространств $X \times Y$. Предположим сначала, что группа $K^*(Y)$ не имеет кручения. Пусть $X_1 \subset X$ — подпространство, отличающееся от пространства X ровно на одну n -мерную клетку. Рассмотрим точную последовательность пары

$$\dots \rightarrow K^*(X, X_1) \rightarrow K^*(X) \rightarrow K^*(X_1) \rightarrow \dots \quad (32)$$

Умножим точную последовательность (32) тензорно на группу $K^*(Y)$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^*(X, X_1) \otimes K^*(Y) & \longrightarrow & K^*(X) \otimes K^*(Y) & \longrightarrow & K^*(X_1) \otimes K^*(Y) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ \dots & \longrightarrow & K^*(X \times Y, X_1 \times Y) & \longrightarrow & K^*(X \times Y) & \longrightarrow & K^*(X_1 \times Y) \longrightarrow \dots \end{array} \quad (33)$$

Верхняя строка диаграммы (33) точна, поскольку группа $K^*(Y)$ не имеет кручения, т.е. является свободной абелевой группой с конечным числом образующих. Вертикальные гомоморфизмы задаются с помощью тензорного произведения векторных расслоений. Поскольку факторпространство X / X_1 гомеоморфно сфере, вертикальный гомоморфизм f является изоморфизмом в силу периодичности Ботта. Из диаграммы (33) индукцией по числу клеток клеточного пространства X доказываем, что гомоморфизм g является изоморфизмом.

Пусть теперь Y_1 — такое пространство, что группа $K^*(Y_1)$ не имеет кручения, а $f: Y \rightarrow Y_1$ — такое отображение, что гомоморфизм $f^*: K^*(Y_1) \rightarrow K^*(Y)$ является эпиморфизмом. Тогда точная последовательность пары (Y_1, Y) превращается в свободную резольвенту

$$0 \leftarrow K^*(Y) \leftarrow K^*(Y_1) \leftarrow K^*(Y_1, Y) \leftarrow 0. \quad (34)$$

Умножим последовательность (34) тензорно на группу $K^*(X)$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & K^*(Y) \otimes K^*(X) & \xleftarrow{\alpha} & K^*(Y_1) \otimes K^*(X) & \xleftarrow{\beta} & K^*(Y_1, Y) \otimes K^*(X) \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ & \longleftarrow & K^*(Y \times X) & \xleftarrow{\alpha'} & K^*(Y_1 \times X) & \xleftarrow{\beta'} & K^*(Y_1 \times X, Y \times X) \longleftarrow \end{array} \quad (35)$$

Покажем, что гомоморфизм f является мономорфизмом. Если $f(x) = 0$, то найдется такой элемент y , что $\alpha(y) = x$. Тогда $\alpha'(g(y)) = 0$. Существует такой элемент z , что $g(y) = \beta'(z)$. Поскольку гомоморфизм h является изоморфизмом, то $z = h(w)$, т.е. $g(y) = g\beta(w)$. Поскольку g — тоже изоморфизм, имеет место равенство $y = \beta(w)$, т.е. $x = \alpha\beta(w) = 0$. Значит, f есть мономорфизм.

Покажем, что $h \text{Ker } \beta = \text{Ker } \beta'$. Ясно, что $h \text{Ker } \beta \subset \text{Ker } \beta'$. Если же $\beta'(x) = 0$, $x = h(y)$, то $g\beta(y) = \beta' h(y) = 0$, т.е. $\beta(y) = 0$ или $y \in \text{Ker } \beta$. Следовательно, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow K^*(Y) \otimes K^*(X) \rightarrow K^*(Y \times X) \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow 0. \quad (36)$$

Поскольку группа $\text{Ker } \beta$ обозначается через $\text{Tor}(K^*(Y), K^*(X))$, то мы получаем формулу Кюннета

$$0 \rightarrow K^*(X) \otimes K^*(Y) \rightarrow K^*(X \times Y) \rightarrow \text{Tor}(K^*(X), K^*(Y)) \rightarrow 0. \quad (37)$$

Для завершения доказательства формулы (37) осталось построить пространство Y_1 . Пространство Y_1 следует искать в виде декартова произведения комплексных грассмановых многообразий, классифицирующих конечное число аддитивных образующих группы $K^*(Y)$. Когомологии грассмановых многообразий не имеют кручения. Тем самым доказательство формулы (37) завершено.

5. Принцип расщепления. Если какое-то функториальное соотношение выполняется для расслоений, которые разлагаются в прямую сумму одномерных расслоений, то это же соотношение выполняется и для любых расслоений.

Этот принцип основан на следующей теореме:

Для любого расслоения ξ над базой X существует такое отображение $f: Y \rightarrow X$, что расслоение $f^*(\xi)$ разлагается в сумму одномерных расслоений, а гомоморфизм $f^*: K^*(X) \rightarrow K^*(Y)$ является мономорфизмом.

В самом деле, пусть $p: E \rightarrow X$ — векторное расслоение ξ . Обозначим через $P(E)$ пространство, точками которого являются комплексные одномерные подпространства, лежащие в слоях расслоения ξ . Пусть $\pi: P(E) \rightarrow X$ — естественная проекция. Тогда, если E' — тотальное пространство одномерного расслоения Хопфа η над базой $P(E)$, то точки пространства E' можно отождествить с парами (l, x) , где $x \in l$, а $l \in P(E)$. Рассмотрим расслоение $\pi^*(\xi)$. Тотальное пространство E'' расслоения $\pi^*(\xi)$ можно отождествить с множеством таких пар $(x, l) \in P(E) \times E$, что $\pi(l) = p(x)$. Очевидно, что пространство E' является подпространством пространства E'' , поскольку из принадлежности $x \in l$ вытекает, что $\pi(l) = p(x)$. Значит, расслоение $\pi^*(\xi)$ разлагается в прямую сумму $\pi^*(\xi) = \eta \oplus \zeta$, $\dim \zeta = \dim \xi - 1$.

Покажем теперь, что гомоморфизм $\pi^*: K^*(X) \rightarrow K^*(P(E))$ является мономорфизмом. Рассмотрим пространство $BU(n)$, отображение $f: X \rightarrow BU(n)$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \longrightarrow & PEU(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & BU(n) \end{array} \quad (38)$$

Диаграмма (38) порождает коммутативную диаграмму спектральных последовательностей

$$\begin{array}{ccc} (1)E_s^{p,q} & \longleftarrow & (2)E_s^{p,q} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (3)E_s^{p,q} & \longleftarrow & (4)E_s^{p,q} \end{array} \quad (39)$$

причем

$$(3)E_2^{p,q} = H^2(X, K^q(\text{pt})), \quad (1)E_2^{p,q} = H^2(X, K^q(\mathbb{C}P^{n-1})),$$

$$(2)E_2^{p,q} = H^p(\text{BU}(n), K^q(\mathbb{C}P^{n-1})), \quad (4)E_2^{p,q} = H^p(\text{BU}(n), K^q(\text{pt})).$$

Далее, в спектральных последовательностях $(2)E$ и $(4)E$ все дифференциалы равны нулю. Значит,

$$(1)E_s^{p,0} = (3)E_s^{p,0} \otimes K^0(\mathbb{C}P^{n-1}), \quad (1)E_s^{p,1} = (3)E_s^{p,1} = 0.$$

Следовательно, гомоморфизм

$$(3)E_\infty^{p,q} \rightarrow (1)E_\infty^{p,q}$$

является мономорфизмом. Поэтому гомоморфизм

$$\pi^*: K^*(X) \rightarrow K^*(P(E))$$

тоже является мономорфизмом.

Применяя описанную конструкцию к расслоению ζ , мы "отщепим" еще одно одномерное слагаемое и так далее до тех пор, пока не разложим прообраз расслоения ξ в сумму одномерных слагаемых.

§ 2. Операции в K -теории

Согласно общему определению когомологическая операция — это такое преобразование $\alpha: K^*(X) \rightarrow K^*(X)$, что для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ получается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^*(X) & \xleftarrow{f^*} & K^*(Y) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ K^*(X) & \xleftarrow{f^*} & K^*(Y) \end{array} \quad (1)$$

т.е. $\alpha f^* = f^* \alpha$. Если $x \in K^0(X)$, $f: X \rightarrow \text{BU}(N)$ — классифицирующее отображение, т.е. $x = f^* \xi_N$, то $\alpha(x) = f^* \alpha(\xi_N)$. Здесь элемент $\alpha(\xi_N) \in K^*(\text{BU}(N))$ есть результат применения операции α к каноническому расслоению ξ_N . Неточность предыдущего рассуждения заключается в том, что мы, как правило, ограничиваемся рассмотрением расслоений над конечными клеточными пространствами, в то время как классифицирующее пространство $\text{BU}(N)$ является бесконечномерным. Пространство $\text{BU}(N)$ строится как прямой предел $\lim_{n \rightarrow \infty} G(N+n, N)$ многообразий Грассмана. Поэтому эле-

мент $x \in K^0(X)$ можно задавать отображением $f_n: X \rightarrow G(N+n, N)$, причем должна быть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G(N+n, N) \\ & \nearrow f_n & \downarrow j_n \\ X & & \\ & \searrow f_{n+1} & \\ & & G(N+n+1, N) \end{array}$$

Для задания когомологической операции α достаточно задать последовательность элементов $\alpha_n \in K^*(G(N+n, N))$ так, чтобы выполнялось равенство $j_n^*(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, т.е. достаточно задать элемент обратного предела

$$\alpha \in \varprojlim K^*(G(N+n, N)) = \mathcal{K}^*(BU(N)). \quad (2)$$

Вообще, если X — бесконечномерное клеточное пространство, у которого каждый n -мерный остов $[X]^n$ является компактным клеточным пространством, то полагаем

$$\mathcal{K}^*(X) = \varprojlim_n K^*([X]^n).$$

Можно показать, что в определении группы $\mathcal{K}^*(X)$ остовы $[X]^n$ можно заменить на любую возрастающую последовательность компактных пространств X_n такую, что $X = \varinjlim X_n$. Тогда определение (2) является частным случаем общего определения.

Поскольку элементы группы $K^0(X)$ определяются расслоениями с точностью до прибавления тривиального слагаемого, то для определения когомологической операции требуется задавать такую систему элементов

$$\alpha_N \in K^*(BU(N)),$$

что естественное отображение

$$BU(N) \xrightarrow{k_N} BU(N+1)$$

переводит элемент α_{N+1} в α_N , т.е. задавать элемент обратного предела

$$\alpha \in \varprojlim \mathcal{K}^*(BU(N)).$$

Можно легко показать, что если положить $BU = \varinjlim BU(N)$, то обратный предел $\varprojlim \mathcal{K}^*(BU(N))$ совпадает с обратным пределом

$$\mathcal{K}^*(BU) = \varprojlim K^*([BU]^n),$$

где $[BU]^n$ — n -мерный клеточный остов пространства BU . В конкретных задачах используются только некоторые когомологические операции. Мы перейдем к описанию таких специальных операций, носящих названия *операций Адамса*.

О п р е д е л е н и е. Операцией $\Psi^k: K(X) \rightarrow K(X)$ называется такая линейная когомологическая операция, что если $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$ — расслоение, разложенное в прямую сумму одномерных слагаемых, то

$$\Psi^k(\xi) = \xi_1^k \oplus \dots \oplus \xi_n^k. \quad (3)$$

Требуется доказать, что такая операция существует и единственна. Чтобы это доказать, рассмотрим симметрический многочлен

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = t_1^k + \dots + t_n^k.$$

Представим многочлен s_k как многочлен от новых переменных — от элементарных симметрических многочленов:

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = P_k^n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad (4)$$

где

$$\sigma_1 = \sigma_1(t_1, \dots, t_n) = t_1 + t_2 + \dots + t_n,$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(t_1, \dots, t_n) = t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots + t_{n-1} t_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma_n = \sigma_n(t_1, \dots, t_n) = t_1 t_2 \dots t_n,$$

$$P_k^n = \sum \lambda_{l_1 l_2 \dots l_n}^k \sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}, \quad (5)$$

$\lambda_{l_1 l_2 \dots l_n}^k$ — некоторые целые числа. Положим

$$\Psi^k(\xi) = \oplus \lambda_{l_1 l_2 \dots l_n}^k \xi^{l_1} \otimes (\wedge_2 \xi)^{l_2} \otimes \dots \otimes (\wedge_n \xi)^{l_n} \quad (6)$$

для произвольного n -мерного векторного расслоения ξ . Правая часть формулы (6) понимается как элемент группы $K(X)$, поскольку коэффициенты $\lambda_{l_1 l_2 \dots l_n}^k$ могут быть отрицательными числами. Покажем, что формула

(6) корректно определяет гомоморфизм группы $K(X)$. Пусть $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, $\dim \xi_1 = p$, $\dim \xi_2 = q$, $p + q = n$. Поскольку

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = s_k(t_1, \dots, t_p) + s_k(t_{p+1}, \dots, t_{p+q}),$$

$$\sigma_j(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\alpha + \beta = j} \sigma_\alpha(t_1, \dots, t_p) \sigma_\beta(t_{p+1}, \dots, t_{p+q}),$$

полагая $\sigma_j = \sum_{\alpha + \beta = j} \sigma'_\alpha \sigma''_\beta$, получим тождество

$$P_k^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \equiv P_k^p(\sigma_1, \dots, \sigma'_p) + P_k^q(\sigma_1'', \dots, \sigma_q''). \quad (7)$$

Следовательно, подставляя в формулу (6) вместо расслоения ξ прямую сумму $\xi_1 \oplus \xi_2$ и применяя соотношение (7), получаем

$$\Psi^k(\xi_1 \oplus \xi_2) = \Psi^k(\xi_1) + \Psi^k(\xi_2). \quad (8)$$

Отсюда следует, что формула (6) корректно определяет аддитивный гомоморфизм $\Psi^k: K(X) \rightarrow K(X)$.

Покажем, что операции Ψ^k определяются соотношением (3) единственным образом. Как и в случае изучения характеристических классов, воспользуемся принципом расщепления расслоений. Рассмотрим n -мерное векторное расслоение $p: E \rightarrow X$, которое мы будем также обозначать одной буквой ξ . Обозначим через $P(E)$ проективизацию расслоения ξ , т.е. пространство всех одномерных прямых, проходящих через начало координат одного из слоев расслоения ξ . Естественная проекция $p: P(E) \rightarrow X$ является локально тривиальным расслоением со слоем CP^{n-1} . Рассмотрим прообраз

расслоения $p^*(\xi)$ над новой базой $P(E)$. Легко видеть, что расслоение $p^*(\xi)$ разлагается в прямую сумму одномерного расслоения Хопфа над $P(E)$ и $(n-1)$ -мерного расслоения η . Далее, гомоморфизм

$$p^*: K(X) \rightarrow K(P(E))$$

является мономорфизмом. Поэтому, повторяя процесс проективизации расслоения конечное число раз, мы можем построить такое отображение

$$f: Y \rightarrow X, \quad (8)$$

для которого выполнены условия:

а) отображение $f^*: K(X) \rightarrow K(Y)$ является мономорфизмом;

б) $f^*(\xi) = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$, где ξ_k — одномерные расслоения.

Применим к расслоению ξ операцию Ψ^k . Тогда

$$f^*(\Psi^k(\xi)) = \Psi^k f^*(\xi) = \xi_1^k \oplus \dots \oplus \xi_n^k,$$

и потому элемент $f^*(\Psi^k(\xi))$ определен единственным образом. Поскольку f^* — мономорфизм, элемент $\Psi^k(\xi)$ определяется единственным образом.

Т е о р е м а. Для операций Ψ^k имеют место следующие свойства:

$$(a) \Psi^k(xy) = \Psi^k(x)\Psi^k(y);$$

$$(б) \Psi^k \Psi^l = \Psi^{kl};$$

$$(в) \text{ если } p - \text{ простое число, то } \Psi^p(x) \equiv x^p \pmod{p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как и раньше, свойства (а) — (в) достаточно проверять для расслоений, разлагающихся в сумму одномерных слагаемых (согласно принципу расщепления).

$$\text{Если } \xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n, \eta = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_m, \text{ то } \xi \otimes \eta = \bigoplus_{i,j} (\xi_i \otimes \eta_j) \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \Psi^k(\xi \otimes \eta) &= \bigoplus_{i,j} (\xi_i \otimes \eta_j)^k = \bigoplus_{i,j} (\xi_i^k \otimes \eta_j^k) = \\ &= (\xi_1^k \oplus \dots \oplus \xi_n^k) \otimes (\eta_1^k \oplus \dots \oplus \eta_m^k) = \Psi^k(\xi) \otimes \Psi^k(\eta). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Psi^k \Psi^l(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n) &= \Psi^k(\xi_1^l \oplus \dots \oplus \xi_n^l) = \xi_1^{kl} \oplus \dots \oplus \xi_n^{kl} = \\ &= \Psi^{kl}(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n). \end{aligned}$$

Наконец, если p — простое число, то

$$\begin{aligned} \Psi^p(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n) &= \xi_1^p \oplus \dots \oplus \xi_n^p = (\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n)^p - \\ &- \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = p \\ i_k \neq p}} \frac{p!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку при $i_k \neq p$ имеем $i_k < p$, то знаменатель выражения $\frac{p!}{i_1! i_2! \dots i_n!}$ не содержит в качестве множителя числа p , т.е. второе слагаемое в правой части выражения (9) делится на p . Следовательно,

$$\Psi^p(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n) \equiv (\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n)^p \pmod{p}.$$

В силу принципа расщепления соотношение

$$\Psi^p(\xi) \equiv \xi^p \pmod{p}$$

справедливо для любого расслоения ξ . Далее, если $x = \xi_1 - \xi_2$, то при нечетном p имеем

$$\Psi^p(x) \equiv (\xi_1^p - \xi_2^p) \pmod{p} \equiv (\xi_1 - \xi_2)^p -$$

$$- \sum_{i,j \neq p} \frac{p!}{i!j!} \xi_1^i (-\xi_2)^j \equiv (\xi_1 - \xi_2)^p \pmod{p} \equiv x^p \pmod{p}.$$

Если $p = 2$, то

$$\Psi^2(x) \equiv (\xi_1^2 - \xi_2^2) \pmod{2} \equiv (\xi_1 - \xi_2)^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2^2 \equiv (\xi_1 - \xi_2)^2 \pmod{2} \equiv x^2 \pmod{2}.$$

Теорема полностью доказана.

Примеры 1. Рассмотрим сферу S^{2n} и образующий элемент $\beta^n \in K^0(S^{2n})$, где $\beta \in K^0(S^2)$. Напомним, что элемент β^n можно понимать как такой элемент, который переходит в $\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n \in K^0(S^2 \times \dots \times S^2)$ при гомоморфизме, индуцированном отображением

$$f: \underbrace{(S^2 \times \dots \times S^2)}_{n \text{ раз}} \rightarrow S^{2n},$$

которое стягивает в точку остов размерности $2n - 2$, а элемент $\beta_k \in K^0(S^2)$ обозначает образующий элемент Ботта в k -м сомножителе. Тогда

$$f^* \Psi^k(\beta^n) = \Psi^k(\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n) = (\Psi^k \beta_1) \otimes \dots \otimes (\Psi^k \beta_n).$$

Далее, $\beta = \eta - 1$, где η — одномерное расслоение Хопфа. Поэтому $\Psi^k \beta = \eta^k - 1 = (1 + \beta)^k - 1 = k\beta$. Следовательно,

$$f^* \Psi^k \beta^n = k^n (\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n) = k^n f^* \beta^n,$$

т.е.

$$\Psi^k \beta^n = k^n \beta^n. \quad (10)$$

2. Пусть V — конечномерная ассоциативная алгебра с делением, т.е. каждый элемент $x \neq 0$ в алгебре V обратим. Обозначим через $P(V^3)$ пространство всех одномерных как V -модулей подпространств в пространстве $V^3 = V \oplus V \oplus V$. Это так называемое проективное (двумерное) пространство над алгеброй V . Если V — поле вещественных или комплексных чисел или тело кватернионов, то $P(V^3) = RP^2, CP^2, KP^2$. Вычислим ко-

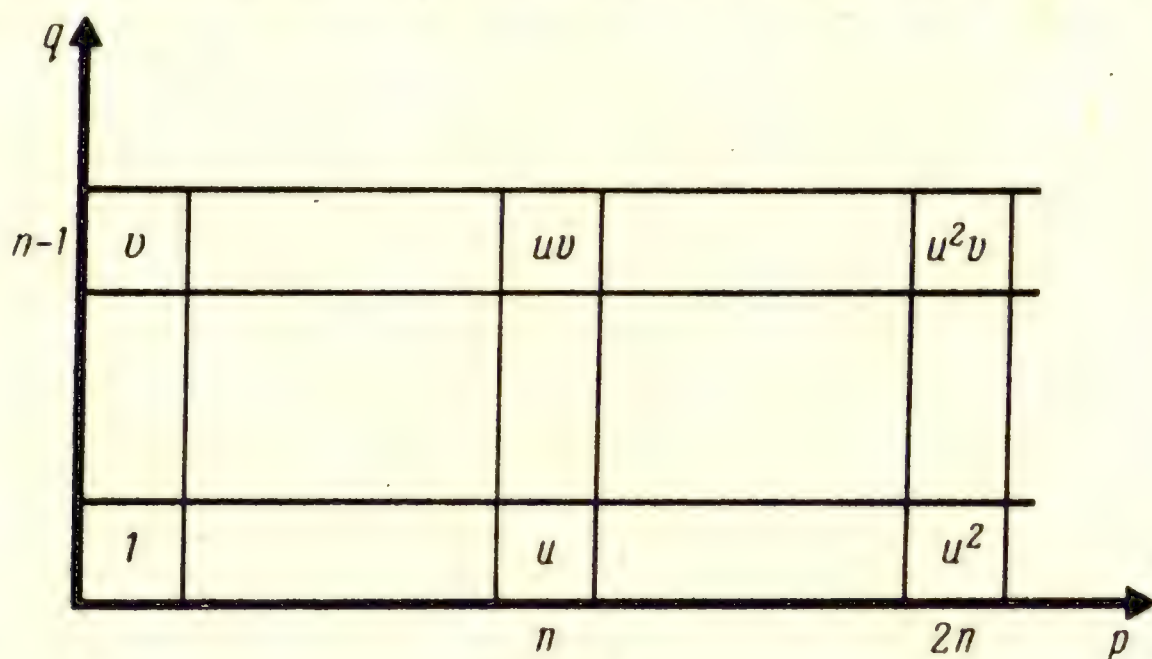


Рис. 18.

гомологии пространства $P(V^3)$. Для этого рассмотрим отображение сферы S , лежащей в V^3 , в пространство $P(V^3)$, которое каждой точке x сферы S сопоставляет прямую проходящую через точку x . Полученное отображение является локально тривиальным расслоением

$$S \rightarrow P(V^3) \quad (11)$$

со слоем $S_0 \subset V$, где S_0 — единичная сфера в пространстве V .

Пусть $n = \dim V > 1$ — четное число. В частности, $\dim S_0 \geq 1$. Тогда $\pi_0(P(V^3)) = 0$. Спектральная последовательность расслоения (11) начинается с члена

$$E_2^{p,q} = H^p(P(V^3), H^q(S_0; \mathbb{Z})) \quad (\text{рис. 18}).$$

Если $v \in H^{(n-1)}(S_0; \mathbb{Z})$ — образующий элемент, то $d_n(v) = u$, $d_n(uv) = u^2$ — образующие элементы в членах $E_n^{n,0}$ и $E_n^{2n,0}$. Следовательно,

$$H^*(P(V^3)) = \mathbb{Z}[u] / \{u^3 = 0\}, \quad \dim u = n.$$

Применяя теперь спектральную последовательность к вычислению K -групп пространства $P(V^3)$, получаем, что

$$K^*(P(V^3)) = \mathbb{Z}[u] / \{u^3 = 0\}, \quad u \in K^0(P(V^3)).$$

Более того, пространство $P(V^3)$ представляется в виде объединения сферы $S^n = P(V^2)$ и диска D^{2n} , приклеенного к сфере по некоторому отображению $\varphi: S^{2n-1} \rightarrow S^n$. Другими словами, имеется пара

$$S^n \subset P(V^3) \rightarrow P(V^3)/S^n = S^{2n}. \quad (12)$$

Точная последовательность в K -теории, соответствующая паре (12), имеет следующий вид:

$$0 \leftarrow K^0(S^n) \xleftarrow{i^*} K^0(P(V^3)) \xleftarrow{j^*} K^0(S^{2n}) \leftarrow 0. \quad (13)$$

Пусть $a \in K^0(S^n)$, $b \in K^0(S^{2n})$ — образующие элементы. Пусть $i^*(x) = a$, $y = j^*(b)$. Если $y = \alpha u + \beta u^2$, то $(\alpha u + \beta u^2)^2 = \alpha^2 u^2 = 0$, и поэтому $\alpha = 0$. Если $x = \gamma u + \delta u^2$, то, поскольку элементы x и y образуют базис в группе $K^0(P(V^3))$, имеем $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$. Меняя, если это необходимо, знаки у элементов a и b , получим, что $x^2 = y$.

Вычислим элементы $\Psi^k(x)$ и $\Psi^k(y)$, учитывая четность числа $n = 2m$. Имеем $i^*\Psi^k(x) = \Psi^k(a) = k^m a$. Значит, $\Psi^k(x) = k^m x + \lambda y$, $\Psi^k(y) = \Psi^k j^*(b) = j^* \Psi^k(b) = k^{2m} y$. Если k — простое число, то $\Psi^k(x) \equiv x^k \pmod{k}$, т.е. $k^m x + \lambda x^2 \equiv x^k \pmod{k}$. Например, при $k = 2$ число λ нечетно, а при $k = 3$ число λ делится на 3.

Поскольку операция Ψ^6 разлагается в композицию $\Psi^6 = \Psi^2 \Psi^3 = \Psi^3 \Psi^2$, то, вычисляя элемент $\Psi^6(x)$ двумя различными способами, получаем

$$\Psi^2 \Psi^3(x) = \Psi^2(3^m x + \mu y) = 6^m x + (3^m \lambda + 2^{2m} \mu) y,$$

$$\Psi^3 \Psi^2(x) = \Psi^3(2^m x + \lambda y) = 6^m x + (3^{2m} \lambda + 2^m \mu) y,$$

или

$$3^m \lambda + 2^{2m} \mu = 3^{2m} \lambda + 2^m \mu,$$

$$2^m (2^m - 1) \mu = 3^m (3^m - 1) \lambda,$$

причем число λ нечетно. Тогда число $3^m - 1$ делится на 2^m . Представим число m в виде $m = 2^k l$, где l — нечетное число. Тогда

$$3^m - 1 = (3^{2^k})^l - 1 = (3^{2^k} - 1)((3^{2^k})^{l-1} + (3^{2^k})^{l-2} + \dots + 1). \quad (14)$$

Поскольку второй множитель в разложении (14) имеет нечетное число слагаемых, он сам тоже нечетен. Следовательно, число $3^{2^k} - 1$ должно делиться на 2^m и, в частности, на 2^{2^k} . Разложим число $3^{2^k} - 1$ на множители:

$$3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1) \cdot (3^{2^{k-2}} + 1) \cdot \dots \cdot (3 + 1) \cdot (3 - 1). \quad (15)$$

Числа 3^{2^k} имеют следующие остатки по модулю 10^2 : 3, 9, 81, 61, 21, 41, 81 и далее с периодом четыре все остатки повторяются. Поэтому, начиная с $k = 1$, числа $3^{2^k} + 1$ делятся на 2 и не делятся на $4 = 2^2$. Значит, согласно разложению (15) число $3^{2^k} - 1$ делится на 2^{k+2} и не делится на 2^{k+3} . Поэтому должно выполняться неравенство

$$2^k l \leq k + 2. \quad (16)$$

При $l = 1$ неравенство (16) выполняется при $k = 0, 1, 2$. При $l \geq 3$ неравенство (16) не имеет решений. Таким образом, число m может принимать всего лишь три значения: $m = 1, m = 2, m = 4$, т.е. $n = 2, n = 4, n = 8$.

Итак, примеры комплексов типа $P(V^3)$ могут существовать лишь в размерностях $\dim V = 2, 4, 8$. И, действительно, кроме поля комплексных чисел и тела кватернионов имеется еще восьмимерная алгебра чисел Кэли, которая хотя и не ассоциативна, но проективное пространство $P(V^3)$ для которой может быть определено корректно.

У п р а ж н е н и е. Показать, что в случае нечетномерных алгебр V с делением должно выполняться равенство $\dim V = 1$, поскольку на четномерных сферах отсутствуют ненулевые векторные поля.

§ 3. Изоморфизм Тома и прямой образ

Рассмотрим комплексное n -мерное векторное расслоение

$$p: E \rightarrow X, \quad (1)$$

которое будем обозначать одной буквой ξ . Тотальное пространство E расслоения ξ некомпактно. Обозначим через ξ^X одноточечную компактификацию тотального пространства E с помощью бесконечно удаленной точки ∞ . Пространство ξ^X будем называть *пространством Тома расслоения* ξ . Это же пространство можно представлять как факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$, где $D(\xi)$ — подпространство, являющееся объединением единичных дисков расслоения ξ , а $S(\xi)$ — подпространство, являющееся объединением единичных сфер в тотальном пространстве E .

Используя одноточечную компактификацию, введем понятие виртуального расслоения с компактным носителем, которое мы будем задавать в виде разностной конструкции (ξ_1, d, ξ_2) на пространстве E с условием, чтобы гомоморфизм d был изоморфизмом вне некоторого компактного подмножества в пространстве E . Вместо тройки (ξ_1, d, ξ_2) можно рассматривать комплексы расслоений, точные вне некоторого компактного подмножества. Группа Гротендика, порожденная такими объектами, будет обозначаться через $K_c(E)$ и называться *K-группой с компактными носителями*. Очевидно, что

$$K_c(E) = K^0(D(\xi), S(\xi)). \quad (2)$$

Группа (2) является кольцом относительно тензорного умножения и, более того, модулем над кольцом $K(X)$.

Определение *K-групп* с компактными носителями распространяется на пары некомпактных пространств и, следовательно, на надстройки.

Значит, имеет смысл говорить о градуированной группе

$$K_c^*(E) = K_c^0(E) \oplus K_c^1(E) \quad (3)$$

с компактными носителями, которая является градуированным кольцом и модулем над кольцом $K^*(X)$.

В § 1 главы 3 был построен элемент

$$\beta \in K^0(D(\xi), S(\xi)) = K_c(E),$$

который мы будем, как и раньше, называть элементом Ботта.

Т е о р е м а 1. Пусть ξ — комплексное векторное n -мерное расслоение с проекцией (1). Тогда операция умножения на элемент β ,

$$\beta: K^*(X) \rightarrow K_c^*(E), \quad (4)$$

является изоморфизмом.

Периодичность Ботта является частным случаем теоремы 1, когда ξ является одномерным тривиальным расслоением. С другой стороны, теорема 1 является легким обобщением периодичности Ботта. Гомоморфизм (4) называют еще *изоморфизмом Тома*.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Проведем доказательство индукцией по числу клеток базы X . Пусть $Y \subset X$ — подпространство, являющееся объединением всех клеток, кроме одной клетки старшей размерности, и пусть $E_1 = p^{-1}(Y)$ — тотальное пространство ограничения расслоения на подпространство Y . Получим коммутативную диаграмму из двух точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & K^*(X, Y) & \longrightarrow & K^*(X) & \longrightarrow & K^*(Y) & \longrightarrow \\ & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & \\ \longrightarrow & K^*(E, E_1) & \longrightarrow & K^*(E) & \longrightarrow & K^*(E_1) & \longrightarrow \end{array} \quad (5)$$

Пара (X, Y) может быть заменена в диаграмме (5) на пару (D^m, S^{m-1}) , а пара (E, E_1) — на тотальные пространства ограничения расслоения ξ на пару (D^m, S^{m-1}) . Это ограничение является уже тривиальным пространством, т.е.

$$p^{-1}(D^m) = D^m \times \mathbb{C}^n, \quad p^{-1}(S^{m-1}) = S^{m-1} \times \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, достаточно показать, что гомоморфизм умножения на элемент β ,

$$K^*(D^m, S^{m-1}) \xrightarrow{\beta} K_c^*(D^m \times \mathbb{C}^n, S^{m-1} \times \mathbb{C}^n), \quad (6)$$

является изоморфизмом. Действительно, если гомоморфизм (6) является изоморфизмом, то к диаграмме (5) применима лемма о пяти изоморфизмах. То, что гомоморфизм (6) является изоморфизмом, вытекает уже из периодичности Ботта, поскольку гомоморфизм β разлагается в композицию аналогичных гомоморфизмов для одномерных расслоений:

$$\begin{aligned} K^*(D^m, S^{m-1}) &\xrightarrow{\beta_1} K_c^*(D^m \times \mathbb{C}^1, S^{m-1} \times \mathbb{C}^1) \xrightarrow{\beta_2} \\ &\xrightarrow{\beta_2} K_c^*(D^m \times \mathbb{C}^2, S^{m-1} \times \mathbb{C}^2) \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\beta_n} K_c^*(D^m \times \mathbb{C}^n, S^{m-1} \times \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1 доказана.

Разложение (7) показывает, что изоморфизм Тома удобно описывать не для пары пространств, а для K -теории с компактными носителями.

Для этого заметим, что

$$K_c^*(\mathbb{R}^m) = K^*(D^m, S^{m-1}).$$

Вообще, если X — произвольное (некомпактное) клеточное пространство, ξ — некоторое векторное комплексное расслоение над пространством X с тотальным пространством E , то изоморфизм Тома задается как операция умножения на элемент β :

$$K_c^*(X) \xrightarrow{\beta} K_c^*(E). \quad (8)$$

Гомоморфизм β удобно ассоциировать с вложением $i: X \rightarrow E$ базы X в тотальное пространство E в качестве нулевого сечения. Обозначим тогда гомоморфизм β новым способом — через i_* . Пусть η — второе векторное расслоение над базой X , E' — тотальное пространство прообраза расслоения η при проекции $E \rightarrow X$. Пространство E' , с одной стороны, является тотальным пространством прообраза расслоения η , а с другой стороны, тотальным пространством прямой суммы $\xi \oplus \eta$ над базой X . Если $j: E \rightarrow E'$ — вложение в качестве нулевого сечения, то композиция ji есть вложение базы X в качестве нулевого сечения расслоения $\xi \oplus \eta$.

Т е о р е м а 2. Гомоморфизмы i и j удовлетворяют следующим условиям:

$$(a) (ji)_* = j_* i_*;$$

$$(b) i_*(xi^*(y)) = i_*(x)y \text{ для любых } y \in K_c^*(E) \text{ и } x \in K_c^*(X).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство (a) очевидно. Свойство (b) в случае $x = 1$ означает, что $i_*(i^*(y)) = \beta i^*(y)$. Так как любой элемент $y \in K_c^*(E)$ имеет вид $y = i_*(x) = \beta x$, то получаем, что нам достаточно доказать равенство

$$\beta^2 = \beta i^*(\beta). \quad (9)$$

Равенство (9) проверим для случая расслоения ξ , разлагающегося в прямую сумму одномерных слагаемых, $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$. Поскольку элемент β разлагается в тензорное произведение

$$\beta = \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n, \quad (10)$$

где $\beta_k \in K_c^0(E_k)$ — элемент Ботта для тотального пространства E_k расслоения ξ_k , то равенство (9) следует из аналогичного равенства для одномерного расслоения:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \beta_1^2 \otimes \dots \otimes \beta_n^2 = \beta_1 i^*(\beta_1) \otimes \dots \otimes \beta_n i^*(\beta_n) = \\ &= (\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n) i^*(\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_n) = \beta i^*(\beta). \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, пусть ξ — одномерное комплексное расслоение. Без ограничения общности можно считать, что база расслоения есть $\mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство, а ξ есть расслоение Хопфа. Точки пространства $\mathbb{C}P^n$ — это одномерные комплексные прямые l в пространстве \mathbb{C}^{n+1} , проходящие через начало координат. Тогда точки тотального пространства E расслоения ξ суть пары (x, l) , где x — вектор из пространства \mathbb{C}^{n+1} и $x \in l$. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{C}P^{n+1}$, точки которого задаются $n+2$ проективными координатами $(z_0 : z_1 : \dots : z_n : z_{n+1})$. Пусть $\infty = (0 : 0 : \dots : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^{n+1}$ и $U = \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{\infty\}$ — открытая область. Покажем, что пространство E гомеоморфно области U . Зададим гомеоморфизм $f: U \rightarrow E$ формулами

$$f(z_0 : z_1 : \dots : z_n : z_{n+1}) = \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n), (t_0, t_1, \dots, t_n)\}, \quad (12)$$

где

$$t_k = \frac{\overline{z_k z_{n+1}}}{|z_0|^2 + \dots + |z_k|^2}. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) корректно определены в области U и, очевидно, задают искомый гомеоморфизм. Значит,

$$\xi \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n+1}. \quad (14)$$

Далее покажем, что элемент Ботта

$$\beta \in K_c(E) = K^0(\xi \mathbb{C}P^n) = K^0(\mathbb{C}P^{n+1})$$

совпадает с элементом $[\xi] - 1$. Согласно конструкции элемента Ботта β он представляется разностной конструкцией $(\Lambda_0(\eta), d, \Lambda_1(\eta))$ над базой E . Поскольку расслоение $\Lambda_0(\eta)$ тривиально, то наличие изоморфизма d вне подпространства $\mathbb{C}P^n \subset E \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ означает, что одномерное расслоение $\Lambda_1(\eta) = \eta = p^*(\xi)$, где $p: E \rightarrow \mathbb{C}P^n$ — проекция, является тривиальным в окрестности бесконечно удаленной точки $\infty \in \mathbb{C}P^{n-1}$. Значит, элемент β представляется в виде разности $\beta = [\xi] - 1$, где ξ — некоторое одномерное расслоение. Расслоение ξ полностью характеризуется своим первым классом Чженя $c_1(\xi)$. Поэтому вычисление $c_1(\xi)$ достаточно произвести для случая $n = 0$, т.е. когда база расслоения ξ есть точка, а пространство Тома есть двумерная сфера $\mathbb{C}P^1 = S^2$. В этом случае расслоение ξ тривиально и $\beta = [\xi] - 1$, где ξ — расслоение Хопфа над пространством $\mathbb{C}P^1$. Значит, $c_1(\xi) = c_1(\zeta)$, т.е. ξ тоже является расслоением Хопфа.

Итак, мы показали, что если ξ — расслоение Хопфа над пространством $\mathbb{C}P^n$, то его пространство Тома гомеоморфно пространству $\mathbb{C}P^{n+1}$, $\beta = [\xi] - 1$. Тогда

$$i^*(\beta) = [\xi] - 1.$$

Нам требуется показать, что

$$\beta^2 = \beta i^*(\beta). \quad (15)$$

Перейдем для этого с помощью характера Черна к когомологиям и покажем, что

$$(\text{ch } \beta)^2 = \text{ch } \beta \text{ ch } i^*(\beta). \quad (16)$$

Пусть $t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$, $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^{n+1}; \mathbb{Q})$ — образующие в рациональных когомологиях. Тогда $i^*(\alpha) = t$ и $\alpha^k t^l = \alpha^{k+l}$. Таким образом, требуется показать, что

$$(e^\alpha - 1)(e^\alpha - 1) = (e^\alpha - 1)(e^t - 1), \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \right) \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \\ & = \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \right) \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \right) = \\ & = \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \right) \left(t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство доказывает формулу (17), а следовательно, и формулу (15). Теорема 2 полностью доказана.

Изоморфизм Тома превращает K -функтор в ковариантный функтор, т.е. гомоморфизм i_* действует в ту же сторону, что и вложение i . Однако вложение i не может быть произвольным. В теореме 2 вложение i было вложением в качестве нулевого сечения в комплексном векторном расслоении. Мы расширим класс отображений i , для которых построим гомоморфизм i_* , удовлетворяющий условиям теоремы 2.

Рассмотрим гладкие компактные многообразия и гладкие их отображения. Через TX обозначим тотальное пространство касательного расслоения многообразия X .

Т е о р е м а 3. Для каждого гладкого отображения

$$f: X \rightarrow Y$$

существует такой гомоморфизм

$$f_*: K_c(TX) \rightarrow K_c(TY),$$

что

$$(a) \quad (fg)_* = f_* g_*;$$

$$(b) \quad f_*(xf^*(y)) = f_*(x)y, \quad x \in K_c(TX), \quad y \in K_c(TY).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi: X \rightarrow V$ — вложение многообразия X в евклидово пространство достаточно большой размерности. Тогда отображение f разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{i} Y \times V \xrightarrow{p} Y,$$

где $i(x) = (f(x), \varphi(x))$, а p — проекция на первую координату. Пусть $U \subset Y \times V$ — нормальная трубчатая окрестность подмногообразия $i(X)$. Тотальное пространство TX касательного расслоения многообразия X является гладким многообразием, касательное расслоение к которому имеет каноническую структуру комплексного векторного расслоения. Поэтому вложение

$$i: TX \rightarrow TU$$

есть вложение на нулевое сечение комплексного векторного расслоения ξ , которое является комплексификацией нормального расслоения вложения $X \subset U$:

$$\xi = c\nu(X \subset U).$$

Аналогично, вложение

$$k: TY \subset TY \times TV$$

тоже является вложением на нулевое сечение комплексного (тривиального) векторного расслоения. Пусть, наконец,

$$j: TU \subset T(Y \times V)$$

— вложение открытой области. Положим

$$f_*(x) = k_*^{-1} j_* i_*(x), \tag{18}$$

где $j_*: K_c^*(TU) \rightarrow K_c^*(T(Y \times V))$ определяется естественным образом как продолжение всех изоморфизмов в разностной конструкции с области TU на все пространство $T(Y \times V)$.

Отображение f_* , построенное по формуле (18), не зависит от выбора вложения φ в пространство V , поскольку, если размерность V достаточно велика, то различные вложения гомотопны в классе вложений. Следова-

тельно, гомотопны и вложения j , а гомоморфизмы j_* совпадают. Отображение f_* не зависит от размерности пространства V , поскольку прибавление к пространству V прямого слагаемого V' в композиции (18) соответствует применению изоморфизма Тома в композиции с обратным изоморфизмом.

Свойство (а) теоремы 3 следует из коммутативности следующей диаграммы вложений и проекций:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Z \times V \times W & & & & \\
 & \nearrow^{(g^*, \varphi, \phi^*)} & & \nwarrow & & & \\
 X & \xrightarrow{(i, \varphi)} & Y \times V & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{(g, \phi)} & Z \times W \longrightarrow Z
 \end{array} \quad (19)$$

Докажем свойство (б). Пусть $x \in K_c^*(TX)$, $y \in K_c^*(TY)$. Тогда

$$f_*(xf^*(y)) = k_*^{-1} j_* i_*(x(i^*p^*y)). \quad (20)$$

Используя заключение (б) теоремы 2, получим

$$f_*(xf^*(y)) = k_*^{-1} j_* \{i_*(x)(p^*y)\} = k_*^{-1} \{j_* i_*(x)\} p^*y.$$

Поскольку $k_*(a) = p^*(a)k_*(1)$, имеет место равенство $j_* i_*(x) = p^*(k_*^{-1} j_* i_*(x))k_*(1)$. Значит, $k_*^{-1} \{j_* i_*(x)\} p^*(y) = (k_*^{-1} j_* i_*(x))y = f_*(x)y$, что и требовалось доказать. Теорема 3 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 может быть обобщена на случай гладких многообразий, касательное расслоение которых допускает структуру комплексного расслоения. В частности, для комплексных аналитических многообразий тоже справедлива теорема 3.

Гомоморфизм f_* , определенный в теореме 3, называют обычно *прямым образом* в K -теории. Совершенно ясно, что требование, чтобы пространства X и Y были гладкими многообразиями, тоже не является существенным. Достаточно, чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ разлагалось в композицию

$$X \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{j} E_2 \xrightarrow{p} Y, \quad (21)$$

где i — вложение на нулевое сечение некоторого комплексного расслоения, j — вложение на открытую область, а p — проекция некоторого комплексного векторного расслоения.

П р и м е р. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — локально тривиальное расслоение, слой которого является многообразием F со структурой комплексного расслоения в касательном расслоении (т.е. является почти комплексным многообразием), а структурная группа является группой диффеоморфизмов, сохраняющих комплексную структуру касательного расслоения. Пусть пространство X компактно. Тогда разложение (21) для отображения f существует. Действительно, пусть $\varphi: X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое вложение, а отображение

$$i: X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^N \quad (22)$$

задается формулой $i(x) = (f(x), \varphi(x))$. Тогда i является вложением, а пересечение подпространства $Y \times \mathbb{R}^N$ с подмногообразием $i(X)$ трансверсально и пересечение это равно слою $F = f^{-1}(y)$. Это значит, что нормальное расслоение к вложению многообразия X в многообразие $Y \times \mathbb{R}^N$ допускает структуру комплексного расслоения (если N четно и велико). В этом случае для отображения $f: X \rightarrow Y$ справедливы утверждения теоремы 3.

§ 4. Теорема Римана — Роха

Изоморфизм Тома, рассмотренный в предыдущем параграфе, подобен изоморфизму Тома в когомологиях. Последний является операцией умножения на элемент $\varphi(1) \in H_c^{2n}(E; \mathbb{Z})$. Здесь $n = \dim \xi$ — размерность векторного комплексного расслоения, тотальное пространство которого обозначено через E .

Естественно сравнить изоморфизм Тома в K -теории и изоморфизм Тома в когомологиях. Для этого включим гомоморфизмы β и φ с помощью характера Черна в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K^*(X) & \xrightarrow{\beta} & K_c^*(E) \\ \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(X; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\varphi} & H_c^*(E; \mathbb{Q}) \end{array} \quad (1)$$

Диаграмма (1), вообще говоря, не коммутативна. В самом деле,

$$\text{ch } \beta(x) = \text{ch}(\beta \otimes x) = \text{ch } \beta \text{ ch } x, \quad (2)$$

$$\varphi \text{ ch } x = \varphi(1) \text{ ch } x. \quad (3)$$

Поэтому левые части формул (2) и (3) отличаются друг от друга множителем $T(\xi) = \varphi^{-1}(\text{ch } \beta)$:

$$\text{ch } \beta(x) = T(\xi) \varphi(\text{ch}(x)). \quad (4)$$

Класс когомологий $T(\xi) \in H^*(X; \mathbb{Q})$ является некоторым характеристическим классом расслоения ξ и, значит, выражается в виде многочлена от классов Чженя $c_i(\xi)$ или в виде симметрического многочлена от образующих t_1, t_2, \dots, t_n , посредством которых сами классы Чженя $c_i(\xi)$ выражаются в виде элементарных симметрических многочленов. Для описания класса $T(\xi)$ допустим, что расслоение ξ является прямой суммой одномерных расслоений $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$. Тогда $t_k = c_1(\xi_k)$. Поскольку в этом случае элемент β разлагается в тензорное произведение:

$$\beta = \beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_n, \quad (5)$$

где $\beta_k \in K_c^0(E_k)$ — элемент Ботта для тотального пространства E_k расслоения ξ_k , а $\varphi(1) = \varphi_1(1)\varphi_2(1)\dots\varphi_n(1)$, где $\varphi_k: H^k(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^k(E_k; \mathbb{Z})$ — изоморфизм Тома в когомологиях для расслоения ξ_k , то

$$T(\xi) = \varphi^{-1}(\text{ch } \beta) = \varphi_1^{-1}(\text{ch } \beta_1) \dots \varphi_n^{-1}(\text{ch } \beta_n) = T(\xi_1) T(\xi_2) \dots T(\xi_n). \quad (6)$$

В § 3 мы показали, что в качестве одномерного расслоения ξ для вычисления класса $T(\xi)$ достаточно брать расслоение Хопфа над проективным пространством $\mathbb{C}P^n$. Его пространство Тома гомеоморфно пространству $\mathbb{C}P^{n+1}$, а $\beta = [\xi] - 1$.

Пусть $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ — образующий элемент в когомологиях, $c_1(\xi) = \alpha$. Изоморфизм Тома в когомологиях совпадает с умножением на элемент $\alpha = \varphi(1)$. Тогда

$$\begin{aligned} T(\xi) &= \varphi^{-1}(\text{ch } \beta) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{n!} = \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{(n+1)!} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда на основании формул (6) и (7) получаем для n -мерного расслоения следующую формулу:

$$T(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{t_k} - 1}{t_k}. \quad (8)$$

Класс когомологий $T(\xi)$ является смешанным классом когомологий и начинается с единицы в нульмерных когомологиях с рациональными коэффициентами. Поэтому этот класс является обратимым элементом в кольце когомологий. Обратный элемент $T^{-1}(\xi)$ называется *классом Тодда* комплексного расслоения ξ .

Т е о р е м а. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких компактных многообразий. Тогда для любого элемента $x \in K_c^*(TX)$ имеет место формула

$$\text{ch } f_*(x) T^{-1}(TY) = f_*(\text{ch } x T^{-1}(TX)). \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$TX \xrightarrow{i} U \xrightarrow{j} TY \times \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{p} TY$$

— разложение (21) из § 3. Как в K -теории, так и в когомологиях прямой образ определяется одинаковым образом:

$$f_*(x) = k_*^{-1} j_* i_*(x).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \text{ch } f_*(x) &= \text{ch } k_*^{-1} j_* i_*(x) = k_*^{-1} \text{ch } j_* i_*(x) = k_*^{-1} j_* \text{ch } i_*(x) = \\ &= k_*^{-1} j_* [(i_* \text{ch}(x)) T(\xi)] = f_*(\text{ch}(x) T(\xi)), \end{aligned} \quad (10)$$

где ξ — нормальное расслоение к вложению i . Расслоение ξ с точностью до тривиального слагаемого представляется в виде разности

$$\xi = -[TX] + f^*[TY].$$

Поэтому

$$T(\xi) = T^{-1}(TX) f^* T(TY). \quad (11)$$

Подставим значение формулы (11) в формулу (10) и умножим левую и правую части формулы (10) на множитель $T^{-1}(TY)$. Получим

$$\text{ch } f_*(x) T^{-1}(TY) = f_*(\text{ch } x T^{-1}(TX) f^* T(TY)) T^{-1}(TY) = f_*(\text{ch } x T^{-1}(TX)),$$

т.е. получим формулу (9). Теорема доказана.

Формулу (9) можно переписать и в виде (10):

$$\text{ch } f_*(x) = f_* \left(\text{ch } x \frac{f^* T(TY)}{T(TX)} \right). \quad (12)$$

П р и м е р ы. 1. Пусть X — компактное почти комплексное $2n$ -мерное многообразие, а Y — одноточечное пространство и $f: X \rightarrow Y = \text{pt}$ — естественное отображение. Тогда прямой образ в когомологиях

$$f_*: H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}$$

отображает группу $H^{2n}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ тождественно, а остальные группы когомологий отображаются в нуль. Для одноточечного пространства имеем $T(\text{pt}) = 1$. Применим формулу (12) для элемента $x = 1$. Получим $f_*(1) \in K^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}$. Поэтому характер Черна $\text{ch } f_*(1)$ является целым числом. Следовательно, $f_*(T^{-1}(TX))$ тоже является целым числом, т.е. целым является старший класс когомологий размерности $2n$ при разло-

жении класса Тодда $T^{-1}(TX)$ по однородным компонентам. Другими словами, целым является значение $\langle T^{-1}(TX), [TX] \rangle$ класса Тодда на фундаментальном цикле $[TX]$ многообразия TX . Это целое число называется *родом Тодда* многообразия X .

Заметим, что в наших рассуждениях содержится некоторая теорема целочисленности, поскольку согласно определению род Тодда является, вообще говоря, числом рациональным, а мы показали, что он является целым числом.

2. Допустим, что у n -мерного почти комплексного многообразия F род Тодда равен единице, т.е. $\langle T^{-1}(F), [F] \rangle = 1$. Это значит, что старшая компонента в разложении класса Тодда $T^{-1}(F)$ по однородным слагаемым совпадает с образующей в группе когомологий $H^{2n}(F; \mathbb{Z})$.

Рассмотрим локально тривиальное расслоение $f: E \rightarrow X$ со слоем F и структурной группой диффеоморфизмов, сохраняющих почти комплексную структуру. Используя разложение (21) и пример из § 3, получаем формулу, аналогичную формуле (12):

$$\text{ch } f_*(x) = f_*(\text{ch } x T^{-1}(TF)), \quad x \in K_c^*(E), \quad (13)^*$$

где под TF понимается комплексное расслоение над базой E , касательное к слоям $F \subset E$. Полагая $x = 1$, получаем

$$\text{ch } f_*(1) = f_*(T^{-1}(TF)).$$

Гомоморфизм f_* в когомологиях понижает размерность ровно на $2n$. Это значит, что $2n$ -мерная компонента когомологий при прямом образе переходит в нульмерную компоненту. Поскольку род Тодда многообразия F равен единице, то нульмерная компонента элемента $f_*(T^{-1}(TF))$ равна единице. Значит, элемент $f_*(1)$ в K -теории при ограничении на нульмерный остов равен единице. Следовательно, элемент $f_*(1) - 1$ равен нулю на нульмерном остове пространства X . Поскольку пространство X является конечным клеточным пространством, то некоторая степень элемента $f_*(1) - 1$ равна нулю, т.е. элемент $f_*(1)$ является обратимым элементом в кольце $K(X)$. Таким образом, композиция

$$f_*(f^*(x)) = f_*(1)x \quad (14)$$

является обратимым отображением группы $K^*(X)$. Значит, гомоморфизм $f^*: K^*(X) \rightarrow K^*(E)$ является мономорфизмом на прямое слагаемое.

Такие рассуждения используются, например, при изучении G -расслоений со слоем G/T , где G — компактная связная группа Ли, а T — тор максимальной размерности, поскольку известно (Борель и Хирцебрух [1]), что однородное пространство G/T допускает комплексную аналитическую структуру, род Тодда для которой равен единице.

В § 4 главы 3 был построен гомоморфизм (1):

$$b: R(G) \rightarrow K(BG),$$

где $R(G)$ — кольцо виртуальных представлений группы G . Если бы пространство BG было конечным клеточным пространством, то задачу о вычислении образа гомоморфизма b можно было бы свести к аналогичной задаче для максимального тора T . В самом деле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{b} & K(BG) \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 \\ R(T) & \xrightarrow{b} & K(BT) \end{array} \quad (15)$$

Известно, что гомоморфизм i_1 является мономорфизмом на подкольцо виртуальных представлений, инвариантных относительно действия группы Вейля на торе T , т.е. группы внутренних автоморфизмов группы G , оставляющих тор T инвариантным. Далее, гомоморфизм i_2 отображает кольцо $K(BG)$ в подкольцо элементов, инвариантных относительно действия группы Вейля. Значит, если бы гомоморфизм i_2 был мономорфизмом, а нижняя строка была изоморфизмом, то и верхняя строка была бы изоморфизмом.

Похожее утверждение можно доказать, заменив кольцо виртуальных представлений $R(G)$ на его пополнение в топологии, порожденной идеалом нульмерных представлений, а кольцо $K(BG)$ — на обратный предел $\varprojlim K[BG]^n$ по конечномерным остовам пространства BG (Атья и Хирцеbruch [1]).

Изучение эллиптических операторов на замкнутых гладких многообразиях является одним из плодотворных применений векторных расслоений. Мы изложим здесь геометрические конструкции, естественно возникающие при анализе дифференциальных и псевдодифференциальных операторов.

§ 1. Символ псевдодифференциального оператора

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор A , действующий в пространстве гладких функций от n вещественных переменных:

$$A: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Оператор A можно представить в виде конечной линейной комбинации частных производных

$$A = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, составленный из неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $a_{\alpha}(x)$ — гладкие функции от переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$, а символ $\partial^{|\alpha|}/\partial x^{\alpha}$ обозначает оператор взятия частной производной:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}. \quad (3)$$

Наибольшее значение $|\alpha|$ называется *порядком дифференциального оператора*, так что формула (2) может быть записана в виде

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (4)$$

Введем новую группу переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Положим

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} i^{|\alpha|}, \quad (5)$$

где $\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

Функция $a(x, \xi)$ называется *символом дифференциального оператора A* . Символ оператора A является многочленом по переменным ξ степени не выше m . Сам оператор получается путем подстановки вместо переменных ξ_k операторов дифференцирования $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}$, т.е.

$$A = a\left(x, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (6)$$

Символ (5) оператора A можно разложить в сумму однородных многочленов по переменным ξ :

$$a(x, \xi) = a_m(x, \xi) + a_{m-1}(x, \xi) + \dots + a_0(x, \xi).$$

Слагаемое $a_m(x, \xi)$ старшей степени называется *главным символом* оператора A , в то время как весь символ $a(x, \xi)$ называют еще *полным символом* оператора A . Смысл выделения главного символа заключается в следующем его свойстве.

Предложение 1. Пусть

$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n) \quad (\text{короче, } y = y(x))$$

— некоторая гладкая замена координат в пространстве R^n . Тогда в новой системе координат $y = (y^1, \dots, y^n)$ оператор B , задаваемый по формуле

$$(Bu)(y) = (Au(y(x)))_{x=y(x)}, \quad (7)$$

тоже является дифференциальным оператором порядка m , главный символ которого $b_m(y, \eta)$ имеет вид

$$b_m(y, \eta) = a_m\left(x(y), \eta \frac{\partial y(x(y))}{\partial x}\right). \quad (8)$$

где $x(y) = \{x^k(y^1, \dots, y^n)\}$ — обратная замена координат, а

$$\eta \frac{\partial y(x(y))}{\partial x} = \left\{ \eta_i \frac{\partial y^i}{\partial x^k} (x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)) \right\}.$$

Оператор B , задаваемый формулой (7), — это собственно тот же оператор A , записанный как дифференциальный оператор в новой системе координат, т.е. выраженный как линейная комбинация операторов, являющихся частными производными по переменным $y = (y^1, \dots, y^n)$. Формула (8) показывает, что главный символ оператора A записывается как функция от переменных (ξ, x) для любого выбора системы координат в R^n . При этом переменные ξ должны меняться по тензорному закону при замене координат для тензора валентности $(0, 1)$, т.е. переменные ξ меняются как компоненты кокасательного вектора. Значит, можно считать, что главный символ $a_m(x, \xi)$ корректно определяет функцию на кокасательном расслоении к пространству R^n , т.е. определение этой функции не зависит от выбора криволинейной системы координат в пространстве R^n .

Доказательство предложения 1. Заметим, что оператор $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) действует на сложную функцию $u(y(x))$ по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (u(y(x))) &= \left\{ \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\alpha_2} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\alpha_n} u(y) \right\}_{y=y(x)} + \\ &+ \text{частные производные меньших порядков.} \end{aligned} \quad (9)$$

В формуле (9) считается, что значения частных производных $\partial y^i(x)/\partial x^k$ являются постоянными числами, т.е. перестановочны с действием опера-

торов $\partial/\partial y^i$. Полагая $\xi_k = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k} \eta_i$, получим, что

$$\begin{aligned} a_m \left(x, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) (u(y(x))) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (u(y(x))) = \\ &= \left\{ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^{\alpha_n} u(y) \right\}_{y=y(x)} + \\ &+ \text{члены меньшего порядка.} \end{aligned}$$

Поэтому, отбрасывая члены меньшей степени, получаем

$$\begin{aligned} b_m(y, \eta) &= \sum_{|\alpha|=m} \left\{ a_\alpha(x) \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^1} \eta_i \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^n} \eta_i \right)^{\alpha_n} \right\}_{x=x(y)} = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \left\{ a_\alpha(x) \xi^\alpha \right\}_{x=x(y)} = a_m \left(x(y), \eta \frac{\partial y(x(y))}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Обозначим через $F_{x \rightarrow \xi}$ преобразование Фурье, задаваемое формулой

$$F_{x \rightarrow \xi}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} u(x) dx, \quad (10)$$

где $(x, \xi) = x^i \xi_i$. Обратное преобразование будем обозначать через $F_{\xi \rightarrow x}$. Оно задается следующей формулой:

$$F_{\xi \rightarrow x}(v)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} v(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Предложение 2. Пусть A — дифференциальный оператор с полным символом $a(x, \xi)$. Тогда

$$(Au)(x) = F_{\xi \rightarrow x} \{ a(x, \xi) [F_{x \rightarrow \xi}(u)(\xi)] \}, \quad (12)$$

т.е.

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где

$$\hat{u}(\xi) = F_{x \rightarrow \xi}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} u(x) dx.$$

Доказательство очевидно.

Предложения 1 и 2 показывают, в каком направлении можно обобщить понятия дифференциального оператора (и его символа), действующего на функциях в \mathbb{R}^n .

1. Понятие дифференциального оператора можно обобщить на случай гладких многообразий M . В этом случае полный символ не определяется, но главный символ определяется как функция a_m , заданная на тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*M . Разумеется, сам дифференциальный оператор уже не будет восстанавливаться по символу однозначно. Он будет определяться главным символом с точностью до слагаемого — оператора меньшего порядка.

2. Понятие дифференциального оператора можно обобщить, используя формулу (13), на случай более широкого класса функций $a(x, \xi)$ в качестве символов. Именно, в формуле (13) функция $\hat{u}(\xi)$ должна достаточно быстро стремиться к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, чтобы интеграл (13) сходилась. Поскольку в качестве функций $a(x, \xi)$ могут служить произвольные многочлены, то необходимо, чтобы

$$|(1 + \xi^2)^n \hat{u}(\xi)| \leq C_n \quad (14)$$

для некоторой константы C_n , зависящей от n . Обычно на пространство функций, в котором действует дифференциальный оператор, накладывают следующие условия:

$$\left| x^\beta \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u(x) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \quad (15)$$

для любых мультииндексов α, β и некоторых констант $C_{\alpha, \beta}$. Условие (15) более сильное, чем условие (14). Класс функций, удовлетворяющих условию (15), обозначим через S , а подпространство финитных функций*) — через S_0 .

Тогда, чтобы оператор A , задаваемый формулой (13), отображал пространство S в себя, достаточно, чтобы для символа $a(x, \xi)$ выполнялись условия

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad (16)$$

где m — некоторое число, а $C_{\alpha, \beta}$ — постоянные, зависящие от мультииндексов α, β .

Говорят, что формула (3) определяет *псевдодифференциальный оператор A порядка m* (точнее, не выше m), если символ $a(x, \xi)$ удовлетворяет условию (16).

3. Наконец, формула (13), определяющая псевдодифференциальный оператор в \mathbb{R}^n , тоже может быть обобщена на случай функций, заданных на гладком компактном многообразии M . Пусть $a(x, \xi)$ — гладкая функция, определенная на тотальном пространстве T^*M кокасательного расслоения к многообразию M . Пусть функция $a(x, \xi)$ в каждой локальной системе координат удовлетворяет условиям (16). Построим оператор A по функции $a(x, \xi)$ как по символу следующим образом. Пространство функций, на котором будет действовать оператор A , состоит из всех гладких функций на многообразии M (это пространство обозначается через $S(M)$). Пусть $\{U_\alpha\}$ — конечный атлас компактного многообразия M с локальными координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Без ограничения общности можно считать, что координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ отображают карту U_α на все пространство \mathbb{R}^n . Пусть $(\xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha})$ — компоненты кокасательного вектора в локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Обозначим через $\{\varphi_\alpha\}$ разбиение единицы, подчиненное атласу $\{U_\alpha\}$, т.е. $\{\varphi_\alpha\}$ — такой набор функций на многообразии M , что $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$,

$\text{Supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$. Пусть, наконец, $\psi_\alpha(x)$ — такие функции, что $\text{Supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$ и $\psi_\alpha(x) \equiv 1$ для всех точек $x \in \text{Supp } \varphi_\alpha$. Значит, $\varphi_\alpha(x) \psi_\alpha(x) \equiv \varphi_\alpha(x)$.

*) То есть функций с компактными носителями.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $u \in S(M)$. Тогда

$$u(x) \equiv \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) u_{\alpha}(x), \quad (17)$$

каждое слагаемое $u_{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x) u(x)$ обращается в нуль вне карты U_{α} . В карте же U_{α} функция $u_{\alpha}(x)$ представима как финитная функция $u_{\alpha}(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n)$ от n вещественных переменных $(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n)$, т.е.

$$u_{\alpha}(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n) \in S_0 \subset S.$$

Рассмотрим, далее, ограничение $a_{\alpha}(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n, \xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha})$ функции $a(x, \xi)$ на карту U_{α} .

Положим

$$A_{\alpha}(u_{\alpha}) = (x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x_{\alpha}, \xi)} a_{\alpha}(x_{\alpha}, \xi) \hat{u}_{\alpha}(\xi) d\xi, \quad (18)$$

где

$$\hat{u}_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_{\alpha}, \xi)} u_{\alpha}(x_{\alpha}) dx_{\alpha}. \quad (19)$$

Поскольку функция $u_{\alpha}(x_{\alpha})$ финитна и бесконечно дифференцируема, то интегралы (19) и (18) имеют смысл.

Функция $A_{\alpha}(u_{\alpha})(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n)$, рассматриваемая как функция в карте U_{α} , не является, к сожалению, финитной и не продолжается нулем до гладкой функции на все многообразие M . Оператор A зададим формулой

$$A(u)(x) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(x) A_{\alpha}(u_{\alpha})(x), \quad (20)$$

которая уже имеет смысл на всем многообразии M .

Допустим, что символ $a(x, \xi)$ является многочленом от переменных $\xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha}$ в каждой карте. Тогда операторы A_{α} являются дифференциальными операторами. Следовательно,

$$\psi_{\alpha}(x) A_{\alpha}(u_{\alpha})(x) = A_{\alpha}(u_{\alpha})(x),$$

т.е.

$$A(u)(x) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(u_{\alpha})(x). \quad (21)$$

Вычислим значения функции $A(u)$ в карте U_{α_0} . Пусть

$$a_{\alpha}(x_{\alpha}, \xi_{\alpha}) = \sum_{|\gamma| \leq m} a_{\alpha, \gamma}(x_{\alpha}) \xi_{\alpha}^{\gamma}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(u_{\alpha})(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n) &= \\ &= \sum_{|\gamma| \leq m} a_{\alpha, \gamma}(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n) \left(\frac{1}{i} \right)^{|\gamma|} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_{\alpha}^{\gamma}} u_{\alpha}(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n). \end{aligned} \quad (22)$$

В частности, на пересечении карт $U_{\alpha} \cap U_{\alpha_0}$ формула (22) тоже справедлива, а оператор A_{α} может быть записан согласно предложению 1 как дифференциальный оператор B_{α} , символ которого $b_{\alpha}(x_{\alpha_0}, \xi_{\alpha_0})$ отличается от символа $a_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}, \xi_{\alpha_0})$ младшими членами, т.е. $B_{\alpha} = A_{\alpha_0} + D_{\alpha}$, где D_{α} — дифференциальный оператор меньшего порядка. Таким образом, при $x \in U_{\alpha_0}$ получаем

$$\begin{aligned} A(u)(x) &= \sum_{\alpha} B_{\alpha}(u_{\alpha})(x) = \sum_{\alpha} \{ A_{\alpha_0}(u_{\alpha})(x) + D_{\alpha}(u_{\alpha})(x) \} = A_{\alpha_0} \left(\sum_{\alpha} u_{\alpha} \right) (x) + \\ &+ \sum_{\alpha} D_{\alpha}(u_{\alpha})(x) = A_{\alpha_0} \left(\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} u \right) (x) + \sum_{\alpha} D_{\alpha}(u_{\alpha})(x) = A_{\alpha_0}(u)(x) + \sum_{\alpha} D_{\alpha}(u_{\alpha})(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (23) показывает, что оператор A , задаваемый формулой (22), является дифференциальным оператором, старший символ которого в локальной системе координат совпадает со старшим однородным слагаемым функции $a(x, \xi)$. В общем же случае формула (20) задает оператор A , определение которого зависит от выбора разбиения единицы $\{\varphi_\alpha\}$ и функций $\{\psi_\alpha\}$.

Функция $a(x, \xi)$ будет называться *символом оператора A* , а число m , фигурирующее в оценке (16), — *порядком оператора A* .

Предложение 3. При изменении разбиения единицы $\{\varphi_\alpha\}$ и функций $\{\psi_\alpha\}$, а также атласа $\{U_\alpha\}$ оператор A , задаваемый формулой (20), меняется на слагаемое, которое является оператором такого же вида (20), но меньшего порядка.

4. Последнее обобщение относится к замене пространства функций, в котором действует псевдодифференциальный оператор A . Пусть ξ_1 и ξ_2 — два комплексных векторных расслоения над многообразием M . Оператор A будем строить как отображение из пространства гладких сечений $\Gamma^\infty(\xi_1)$ расслоения ξ_1 в пространство $\Gamma^\infty(\xi_2)$ гладких сечений расслоения ξ_2 . В этом случае символ оператора задается как линейное отображение расслоений

$$a: \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2), \quad (24)$$

где $\pi^*(\xi_1)$, $\pi^*(\xi_2)$ — прообразы расслоений ξ_1 и ξ_2 при проекции $\pi: T^*M \rightarrow M$. В любой локальной системе координат линейное отображение (24) определяет матрично заданную функцию

$$a(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, \xi_{1\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha}),$$

для элементов которой должны выполняться условия (16). Тогда оператор $A = a(D)$ также задаем формулами (18) — (20), где $u_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x)u(x)$ — сечение расслоения ξ_1 , являющееся в локальной системе координат вектор-функцией.

Предложение 4. Пусть

$$a: \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2), \quad b: \pi^*(\xi_3) \rightarrow \pi^*(\xi_3)$$

— два символа порядков m_1, m_2 соответственно, $c = ba$ — их композиция, являющаяся символом порядка $m_1 + m_2$. Тогда оператор

$$b(D)a(D) - c(D): \Gamma^\infty(\xi_1) \rightarrow \Gamma^\infty(\xi_3)$$

является псевдодифференциальным оператором порядка $m_1 + m_2 - 1$.

Предложение 4 показывает, как решать уравнения

$$Au = f \quad (25)$$

для псевдодифференциального оператора A . Чтобы найти решение уравнения (25), будем искать псевдодифференциальный оператор B , обратный к оператору A , т.е. такой, что $BA = 1$. Пусть $A = a(D)$, а $B = b(D)$. Если $BA = 1$, то согласно предложению 4

$$1 = b(D)a(D) = c(D) + [b(D)a(D) - c(D)].$$

При этом, если порядок оператора A равен m , то порядок оператора B равен $-m$ и порядок оператора $[b(D)a(D) - c(D)]$ равен -1 . Таким образом, оператор $c(D)$ отличается от тождественного оператора на оператор меньшего порядка. Значит, в частности, символ a удовлетворяет условию: гомоморфизм

$$a: \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2)$$

обратим вне некоторой окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения. В локальной системе координат это условие принимает вид

$$\det a(x_\alpha, \xi_\alpha) \neq 0 \text{ при } |\xi_\alpha| > \epsilon. \quad (26)$$

Псевдодифференциальные операторы, символы которых удовлетворяют условию (26), будем называть *эллиптическими операторами*.

5. Наконец, последнее обобщение относится к замене одного псевдодифференциального оператора на последовательность операторов. Пусть заданы расслоения ξ_1, \dots, ξ_k на многообразии M и последовательность символов

$$0 \rightarrow \pi^*(\xi_1) \xrightarrow{a_1} \pi^*(\xi_2) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{k-1}} \pi^*(\xi_k) \rightarrow 0 \quad (27)$$

некоторых порядков m_1, \dots, m_{k-1} . Пусть последовательность (27) образует комплекс, т.е. $a_s a_{s-1} = 0$. Последовательность операторов

$$0 \rightarrow \Gamma^\infty(\xi_1) \xrightarrow{a_1(D)} \Gamma^\infty(\xi_2) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^\infty(\xi_k) \rightarrow 0, \quad (28)$$

соответствующая последовательности символов (27), вообще говоря, не образует комплекса, но композиции $a_s(D) a_{s-1}(D)$ являются псевдодифференциальными операторами порядка, меньшего $m_s + m_{s-1}$.

Говорят, что последовательность (28), образует *эллиптический комплекс*, если последовательность (27) точна вне некоторой окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения T^*M .

§ 2. Фредгольмовы операторы

Ограниченный линейный оператор

$$F: H \rightarrow H$$

в гильбертовом пространстве H называется *фредгольмовым*, если $\dim \text{Ker } F < \infty$, образ $\text{Im } F$ замкнут и $\dim \text{Coker } F < \infty$. Число

$$\text{index } F = \dim \text{Ker } F - \dim \text{Coker } F \quad (1)$$

называется *индексом фредгольмова оператора* F . Индекс оператора F можно также получить по формуле

$$\text{index } F = \dim \text{Ker } F - \dim \text{Ker } F^*, \quad (2)$$

где F^* — сопряженный оператор.

Ограниченный оператор $K: H \rightarrow H$ называется *компактным*, если всякое ограниченное множество X отображается оператором K в предкомпактное множество, т.е. если множество $\overline{K(X)}$ компактно.

Т е о р е м а 1. Пусть F — фредгольмов оператор. Тогда:

(а) существует такое $\epsilon > 0$, что если $\|F - G\| < \epsilon$, то G — фредгольмов оператор и $\text{index } F = \text{index } G$;

(б) если K — компактный оператор, то $F + K$ — фредгольмов оператор и $\text{index}(F + K) = \text{index } F$.

Оператор F фредгольмов тогда и только тогда, когда найдется такой оператор G , что операторы $K = FG - 1$ и $K' = GF - 1$ компактны.

Если F, G — фредгольмовы операторы, то их композиция FG — тоже фредгольмов оператор, причем

$$\text{index } FG = \text{index } F + \text{index } G.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор $F = 1 + K$, где K — компактный оператор. Покажем, что F — фредгольмов оператор. Ядро $\text{Ker } F$ состоит из таких векторов x , что $x + Kx = 0$, т.е. $Kx = -x$. Если бы пространство $\text{Ker } F$ имело бесконечную размерность, то единичный шар $B \subset \text{Ker } F$ был бы ограниченным, но не компактным множеством. С другой стороны, справедливо равенство $K(B) = B$, что противоречит условию компактности оператора K . Покажем, что $\text{Im } F$ — замкнутое подпространство. Пусть $x_n \in \text{Im } F$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Тогда $x_n = F(y_n) = y_n + Ky_n$.

Без ограничения общности можно считать, что $y_n \perp \text{Ker } F$. Если множество $\{\|y_n\|\}$ неограничено, то, переходя к подпоследовательности, получаем, что $\|y_n\| \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{\|y_n\|} + K \frac{y_n}{\|y_n\|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\|y_n\|} = 0.$$

Поскольку последовательность $y_n/\|y_n\|$ уже ограничена, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} K(y_n/\|y_n\|) = z$. Тогда существует предел последовательности $y_n/\|y_n\|$, равный вектору $-z$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\|y_n\|} = -z, \quad (3)$$

т.е. выполняется условие $z + Kz = 0$. Поскольку вектор y_n ортогонален пространству $\text{Ker } F$, то и вектор z ортогонален пространству $\text{Ker } F$, значит, $z = 0$. Но норма вектора $\|y_n/\|y_n\|\|$ равна 1, что противоречит условию (3). Поэтому последовательность y_n ограничена. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} Ky_n = z$.

Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - Ky_n) = x - z$. Следовательно,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = F(x - z), \text{ т.е. } x \in \text{Im } F.$$

Итак, пространство $\text{Im } F$ замкнуто, откуда следует, что $\text{Coker } F = \text{Ker } F^*$. Поскольку сопряженный оператор F^* тоже представляется в виде $F^* = 1 + K^*$, где K^* — компактный оператор, то размерность ядра оператора F^* конечна и справедливо равенство

$$\dim \text{Coker } F = \dim \text{Ker } F^* < \infty.$$

Пусть операторы K, K' компактны и выполнены равенства $FG = 1 + K$, $GF = 1 + K'$. Тогда для ядер операторов F и $1 + K'$ справедливо включение $\text{Ker } F \subset \text{Ker } (1 + K')$, которое, в частности, означает, что размерность ядра оператора F конечна, $\dim \text{Ker } F < \infty$. Аналогично, легко замечаем, что выполняется включение для образов операторов $\text{Im } F \supset \text{Im } (1 + K)$. Поскольку мы ранее доказали, что образ $\text{Im } (1 + K)$ является замкнутым подпространством конечной коразмерности, образ $\text{Im } F$ оператора F обладает тем же свойством.

Обратно, пусть F — фредгольмов оператор. Разложим гильбертово пространство H в прямые суммы:

$$H = \text{Ker } F \oplus (\text{Ker } F)^\perp, \quad (4)$$

$$H = (\text{Im } F)^\perp \oplus \text{Im } F, \quad (5)$$

где $(\text{Ker } F)^\perp$, $(\text{Im } F)^\perp$ — ортогональные дополнения к подпространствам $\text{Ker } F$ и $\text{Im } F$. Очевидно, что ограничение

$$F_1 = F|_{(\text{Ker } F)^\perp}: (\text{Ker } F)^\perp \rightarrow \text{Im } F$$

оператора F на подпространство $(\text{Ker } F)^\perp$ является изоморфизмом, а оператор F в разложениях (4), (5) задается матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Определим новый оператор G , который в разложениях (4), (5) гильбертова пространства задается следующей матрицей:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_1^{-1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда, применяя формулы (6) и (7), мы получаем следующие матричные равенства:

$$FG - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad GF - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В правых частях этих равенств стоят конечномерные, следовательно, компактные операторы.

Если выполнены условия

$$FG = 1 + K, \quad G'F = 1 + K',$$

а операторы K, K' компактны, то операторы G и G' отличаются друг от друга на компактное слагаемое.

Рассмотрим фредгольмов оператор F и такой оператор G , что выполняются равенства $FG = 1 + K$, $GF = 1 + K'$, где K, K' — некоторые компактные операторы. Зададим такое число $\epsilon > 0$, чтобы выполнялась оценка $\|G\| < 1/\epsilon$. Рассмотрим произвольный ограниченный оператор F_1 , отличающийся от оператора F на малое слагаемое α , т.е. $F_1 = F + \alpha$, $\|\alpha\| < \epsilon$. Воспользуемся тем обстоятельством, что операторы $1 + \alpha G$ и $1 + G\alpha$ обратимы, тогда получаем следующие соотношения:

$$(1 + G\alpha)^{-1}GF_1 = (1 + G\alpha)^{-1}(1 + G\alpha + K) = 1 + (1 + G\alpha)^{-1}K,$$

$$F_1G(1 + \alpha G)^{-1} = (1 + \alpha G + K')(1 + \alpha G)^{-1} = 1 + K'(1 + \alpha G)^{-1}.$$

Поскольку операторы $(1 + G\alpha)^{-1}K$, $K'(1 + \alpha G)^{-1}$ компактны, значит, оператор F_1 тоже является фредгольмовым оператором.

Перейдем к вычислению индекса фредгольмова оператора. Если оператор F представлен в матричном виде

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

то, очевидно, индекс оператора F равняется сумме индексов его прямых слагаемых F_1 и F_2 :

$$\text{index } F = \text{index } F_1 + \text{index } F_2.$$

Если оператор F действует в конечномерных пространствах

$$F: H_1 \rightarrow H_2,$$

то он автоматически является фредгольмовым оператором. Его индекс равен разности размерностей образа и прообраза:

$$\text{index } F = \dim H_1 - \dim H_2.$$

В частности, если оператор F обратим, то у него тривиальное ядро и коядро и, значит, $\text{index } F = 0$. Если оператор F_2 обратим, а оператор F_1 конечномерен, то оператор, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$, является фредгольмовым, индекс которого равен нулю. Значит, любой фредгольмов оператор можно изменить на компактное слагаемое таким образом, чтобы индекс оператора не изменился, а любое наперед заданное конечномерное подпространство попало в ядро оператора.

Пусть F — фредгольмов оператор. Разложим его по формуле (6). Пусть G — другой оператор, для которого выполняется оценка $\|F - G\| < \epsilon$. Оператор G можно представить в следующем матричном виде:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{22} & F_2 + \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\|\alpha_{22}\| < \epsilon$. Пусть ϵ настолько мало, что оператор $F_2 + \alpha_{22}$ обратим. Тогда, полагая $X = -(F_2 + \alpha_{22})^{-1} \alpha_{21}$, получаем следующее соотношение:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & F_2 + \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Точно так же, полагая $Y = -\beta_{12}(F_2 + \beta_{22})^{-1}$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & F_2 + \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

В левой части полученного соотношения стоит композиция оператора G и обратимых операторов. Значит, индекс левой части равен индексу оператора G , а индекс правой части равен индексу оператора F , т.е.

$$\text{index } G = \text{index } F.$$

Докажем, наконец, заключение (б) теоремы 1. Пусть K — компактный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим в пространстве H убывающую систему подпространств $H \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_n \supset \dots$. Пусть вектор x_k принадлежит пространству H_k , $\|x_k\| = 1$. Тогда выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Kx_k\| = 0.$$

В самом деле, без ограничения общности можно считать, что коразмерность подпространства H_{k+1} в пространстве H_k равна единице. Пусть векторы e_k образуют ортонормированный базис в пространстве H , причем $e_k \in H_k$ и $e_k \perp H_{k+1}$. Каждый вектор x_k разлагается в сходящийся ряд:

$$x_k = \sum_{\alpha \geq k} x_k^\alpha e_\alpha, \quad \sum_{\alpha \geq k} |x_k^\alpha|^2 = 1.$$

Тогда при $k \leq s$ получаем

$$(x_k, x_s) = \sum_{\alpha \geq s} \bar{x}_k^\alpha x_s^\alpha.$$

Следовательно,

$$|(x_k, x_s)|^2 \leq \left(\sum_{\alpha \geq s} |x_k^\alpha|^2 \right) \left(\sum_{\alpha \geq s} |x_s^\alpha|^2 \right) = \sum_{\alpha \geq s} |x_k^\alpha|^2.$$

Значит, $\lim_{s \rightarrow \infty} (x_k, x_s) = 0$.

Докажем равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Kx_k\| = 0$ от противного. Для этого допустим, что $\|Kx_k\| \geq \epsilon_0$. Выберем число δ настолько малым, чтобы из неравенства $\|x_k - y\| < \delta$ вытекало

$$\|Ky\| = \|Kx_k + K(y - x_k)\| \geq \|Kx_k\| - \|K\| \|y - x_k\| \geq \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Переходя, если это необходимо, к некоторой подпоследовательности, можно так заменить последовательность x_k на новую последовательность $y_k \in H_k$, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\|Ky_k\| \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \quad (y_k, y_s) = 0, \quad \|y_s\| = 1.$$

Поскольку $\{y_s\}$ — ограниченная последовательность, а K — компактный оператор, то, переходя к некоторой подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} Ky_k = z$. Более того, можно считать, что выполняется неравенство

$$\|z - Ky_k\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Рассмотрим последовательность $u_n = \sum_{k=1}^n y_k/k$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u = \sum_{k=1}^{\infty} y_k/k$. Тогда

$$\begin{aligned} \|K(u_n)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n K(y_k)/k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n (z/k + (K(y_k) - z)/k) \right\| \geq \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \|z\| - \sum_{k=1}^n \|K(y_k) - z\|/k \geq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \|z\| - 1. \end{aligned}$$

Если $\|z\| \neq 0$, то получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ku_n\| = \infty$, что противоречит ограниченности оператора K . Значит, $z = 0$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ky_k\| = 0$, что противоречит неравенству $\|Ky_k\| \leq \epsilon_0/2$.

Итак, равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Kx_k\| = 0$ доказано. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|K|H_k\| = 0.$$

Пусть теперь $F: H' \rightarrow H''$ — фредгольмов оператор, а $H' = H'_0 \oplus H'_1$, $H'' = H''_0 \oplus H''_1$ — такие разложения гильбертовых пространств H'_1, H''_1 , что оператор F имеет вид (6). Разложим пространства H'_1 и H''_1 , если это необходимо, еще в прямую сумму так, чтобы оператор F имел следующий матричный вид:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 \end{pmatrix},$$

где F_1 — конечномерная матрица. Тогда компактный оператор K примет матричный вид

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}.$$

Можно выбрать такое разложение, чтобы норма $\|K_{33}\|$ оператора K_{33} была меньше наперед заданного числа ϵ . Тогда мы находимся в условиях разложения (9), и, значит, $\text{index}(F + K) = \text{index } F$. Теорема 1 полностью доказана.

Понятие фредгольмова оператора можно интерпретировать как конечномерность гомологий некоторого комплекса гильбертовых пространств длины два. В общем случае, пусть задана последовательность гильбертовых пространств C_i и последовательность операторов d_i :

$$0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \rightarrow 0. \quad (10)$$

Говорят, что последовательность (10) образует *фредгольмов комплекс*, если выполнено равенство $d_k d_{k-1} = 0$ для любого k , образ $\text{Im } d_k$ оператора d_k является замкнутым подпространством и

$$\dim \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1} = \dim H(C_k, d_k) < \infty.$$

Число

$$\text{index}(C, d) = \sum_k (-1)^k \dim H(C_k, d)$$

называется *индексом фредгольмова комплекса* (10).

Т е о р е м а 2. Пусть задана последовательность операторов

$$0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \rightarrow 0, \quad (11)$$

удовлетворяющая условию: композиция $d_k d_{k-1}$ является компактным оператором. Следующие условия эквивалентны:

(а) существуют такие операторы $f_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$, что $f_{k+1} d_k + d_{k-1} f_k = 1 + r_k$, где r_k — компактные операторы, $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

(б) существуют такие компактные операторы $s_k: C_k \rightarrow C_{k+1}$, что последовательность операторов $d'_k = d_k + s_k$ является фредгольмовым комплексом.

На основании теоремы 2 последовательность операторов (11), удовлетворяющую одному из эквивалентных условий (а), (б), мы тоже будем называть *фредгольмовым комплексом*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (б) теоремы 2. Тогда каждое гильбертово пространство C_k разлагается в прямую сумму трех своих ортогональных подпространств:

$$C_k = C_k^1 \oplus C_k^2 \oplus C_k^3,$$

где

$$C_k^1 = \text{Im } d'_{k-1}, \quad C_k^1 \oplus C_k^2 = \text{Ker } d'_k.$$

При этом оператор d'_k изоморфно отображает подпространство C_k^3 на подпространство C_{k+1}^1 . Положим $f_{k+1} = d'^{-1}_k$. Тогда $f_{k+1} d'_k + d'_{k-1} f_k$ — тождественный оператор на подпространстве $C_k^1 \oplus C_k^3$ и, значит, отличается

от тождественного оператора на конечномерный оператор

$$f_{k+1}d'_k + d'_{k-1}f_k = 1 + r'_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{k+1}d_k + d_{k-1}f_k &= f_{k+1}(d'_k - s_k) + (d'_{k-1} - s_{k-1})f_k = \\ &= f_{k+1}d'_k + d'_{k-1}f_k - f_{k+1}s_k - s_{k-1}f_k = 1 + (r'_k - f_{k+1}s_k - s_{k-1}f_k) = \\ &= 1 + r_k. \end{aligned}$$

Обратно, пусть выполнено условие (а). Тогда, в частности, $d_{n-1}f_n = 1 + r_n$ — фредгольмов оператор. Значит, $\text{Im } d_{n-1}$ — замкнутое подпространство конечной размерности, а пространство C_{n-1} разлагается в ортогональную сумму:

$$C_{n-1} = C_{n-1}^1 \oplus C_{n-1}^2, \quad C_{n-1}^1 = \text{Ker } d_{n-1}. \quad (12)$$

Оператор d_{n-1} изоморфно отображает слагаемое C_{n-1}^2 на образ $\text{Im } d_{n-1}$ оператора d_{n-1} . Оператор d_{n-2} в разложении (12) задается матрицей:

$$d_{n-2} = \begin{pmatrix} d_{n-2}^1 \\ d_{n-2}^2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

причем, поскольку $d_{n-1}d_{n-2}^2$ — компактный оператор, оператор d_{n-2}^2 тоже является компактным. Полагаем

$$d_{n-2}^1 = \begin{pmatrix} d_{n-2}^1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Пусть

$$f_n = \begin{pmatrix} f_n^1 \\ f_n^2 \end{pmatrix}, \quad f_{n-1} = \begin{pmatrix} f_{n-1}^1 & f_{n-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие $f_n d_{n-1} + d_{n-2}^1 f_{n-1} = 1 + r_{n-1}$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} f_n^1 \\ f_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{n-2}^1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1}^1 & f_{n-1}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & f_n^1 d_{n-1} \\ 0 & f_n^2 d_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{n-2}^1 f_{n-1}^1 & d_{n-2}^1 f_{n-1}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d_{n-2}^1 f_{n-1}^1 & f_n^1 d_{n-1} + d_{n-2}^1 f_{n-1}^2 \\ 0 & f_n^2 d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r_{n-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сократим нашу последовательность (11) до новой последовательности

$$0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{d'_0} \dots \xrightarrow{d'_{n-3}} C_{n-2} \xrightarrow{d'_{n-2}} C_{n-1}^1 \rightarrow 0. \quad (16)$$

Из условия (15) вытекает, что последовательность (16) тоже удовлетворяет условию (а). Повторяя этот процесс, мы разложим все пространства C_k в ортогональную сумму: $C_k = C_k^1 \oplus C_k^2$, а операторы d_k так изменим на компактные слагаемые $d'_k = d_k + s_k$, что будет иметь место равенство $C_k^1 = \text{Ker } d'_k$, а образ $\text{Im } d_{k-1} \subset C_k^1$ замкнут и имеет конечную коразмерность в C_k^1 . Следовательно, последовательность (C_k, d_k) является фредгольмовым комплексом.

Теорема 2 доказана.

П р и м е р. По аналогии с примером 4 из § 1 главы 3 фредгольмову комплексу (10) (или (11)) можно сопоставить фредгольмов оператор

$$C_{\text{чет}} = \bigoplus_k C_{2k}, \quad C_{\text{неч}} = \bigoplus_k C_{2k+1}, \quad (17)$$

$$D = \begin{vmatrix} d_0 & d_1^* & 0 \\ & d_2 & d_3^* \\ 0 & & d_4 & \dots \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Положим

$$D_0 = \begin{vmatrix} d_0 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_4 & \dots \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ d_1 & 0 & \\ & d_3 & 0 & \dots \end{vmatrix}.$$

Тогда комплекс

$$\dots \rightarrow C_{\text{чет}} \xrightarrow{D_0} C_{\text{неч}} \xrightarrow{D_1} C_{\text{чет}} \rightarrow \dots \quad (19)$$

имеет конечномерные гомологии, изоморфные сумме соответственно четномерных или нечетномерных гомологий комплекса (10). Поэтому группу гомологий $H(C_{\text{чет}})$ можно отождествить с ядром оператора $D = D_0 + D_1^*$, а группу $H(C_{\text{неч}})$ — с коядром оператора D . Действительно, группу $H(C_{\text{чет}})$ удобно отождествить с подпространством вектора $x \in \text{Ker } D_0$, ортогональных подпространству $\text{Im } D_1$, т.е. таких, что $(x, D_1 u) = 0$ для любого $u \in C_{\text{неч}}$, откуда $(D_1^* x, u) = 0$ или $D_1^* x = 0$, $x \in \text{Ker } D_1^*$. Следовательно, $(D_0 + D_1^*) x = 0$. Обратно, если $(D_0 + D_1^*) x = 0$, то $D_0 x = 0$ и $D_1^* x = 0$, т.е. $(D_1^* x, u) = 0$ для любого вектора $u \in C_{\text{неч}}$. Значит, $(x, D_1 u) = 0$, т.е. вектор x ортогонален подпространству $\text{Im } D_1$. Далее, если $x \in H(C_{\text{неч}})$, то вектор $x \in \text{Ker } D_1$ удовлетворяет условию $x \perp \text{Im } D_0$. Тогда $(x, D_1^* u) = (D_1 x, u) = 0$, т.е. вектор x ортогонален подпространству $\text{Im } D_1^*$. Значит, вектор x ортогонален подпространству $\text{Im } (D_0 + D_1^*)$. Обратно, если $(x, (D_0 + D_1^*) u) = 0$ для любого вектора u , то $((D_0^* + D_1) x, u) = 0$, т.е. $(D_0^* + D_1) x = 0$. Тогда $0 = (D_0 + D_1^*)(D_0^* + D_1) x = (D_0 D_0^* + D_1^* D_1) x$, т.е. $0 = ((D_0 D_0^* + D_1^* D_1) x, x) = (D_0^* x, D_0^* x) + (D_1 x, D_1 x)$; другими словами, $D_0^* x = 0$ и $D_1 x = 0$. Следовательно, $(x, D_0 u) = (D_0^* x, u)$, т.е. вектор x ортогонален подпространству $\text{Im } D_0$ и $x \in \text{Ker } D_1$.

Итак, мы получили, что индекс фредгольмова оператора (18) совпадает с индексом фредгольмова комплекса (10).

§ 3. Соболевские нормы

Соболевской нормой функции $u(x)$, принадлежащей пространству S , называется число

$$\|u(x)\|_S^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x) (1 + \Delta)^s u(x) dx, \quad (1)$$

где $\Delta = \sum_{k=1}^n \left(i \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2$ — оператор Лапласа. Переходя к преобразованиям

Фурье, формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad (2)$$

где индекс можно брать не обязательно целым, но и любым вещественным числом. Пополнение пространства S по соболевской норме (1) (или (2)) будем обозначать через $H_s(\mathbb{R}^n)$ и называть *соболевским пространством*.

Предложение 1. *Соболевские нормы (2) для различных систем координат эквивалентны на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, т.е. найдутся такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что при $\text{supp } u \subset K$ выполнены неравенства*

$$\|u\|_{1,s} \leq C_1 \|u\|_{2,s} \leq C_2 \|u\|_{1,s},$$

где $\|u\|_{1,s}, \|u\|_{2,s}$ — соболевские нормы (2), соответствующие двум системам координат в \mathbb{R}^n .

Предложение 1 легко проверяется для случая целого индекса s по формуле (1). В общем случае доказательство предложения 1 мы опускаем.

Предложение 1 позволяет обобщить понятие соболевского пространства на самый общий случай — произвольного компактного многообразия M и векторного расслоения ξ над ним. Фиксируем скалярное произведение в расслоении ξ , атлас U_α и разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$. Пусть u — произвольное гладкое сечение. Положим

$$\|u\|_s^2 = \sum_{\alpha} \|\varphi_\alpha u\|_s^2, \quad (3)$$

где $\|\varphi_\alpha u\|_s^2$ определены по формуле (2) в некоторой локальной системе координат карты U_α . Предложение 1 утверждает, что при изменении атласа и разбиения единицы норма (3) меняется на эквивалентную. Значит, пополнение пространства $\Gamma(\xi)$ по норме (3) не зависит от выбора атласа и разбиения единицы (и выбранного скалярного произведения в слоях расслоения ξ). Обозначим это пополнение через $H_s(\xi)$.

Теорема 1. *Пусть M — компактное многообразие, ξ — комплексное векторное расслоение над ним, $s_1 < s_2$ — положительные целые числа. Тогда вложение*

$$H_{s_2}(\xi) \rightarrow H_{s_1}(\xi) \quad (4)$$

является ограниченным компактным оператором.

Теорема 1 носит название *теоремы вложения Соболева*. Доказательство теоремы 1 достаточно проводить локально, поскольку каждое сечение $u \in \Gamma(\xi)$ разлагается в сумму $u = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha u$ сечений $\varphi_\alpha u$ с носителем, лежащим в одной карте. Итак, пусть $u(x)$ — функция, определенная в пространстве \mathbb{R}^n , носитель которой лежит в единичном кубе I^n . Пространство всех таких функций можно считать подпространством в пространстве функций на n -мерном торе T^n , отождествив противоположные грани у куба I^n . Соболевские нормы функции $u(x)$ для положительных целых s перейдут в соболевские нормы на многообразии T^n . Всякая гладкая функция u на торе T^n разлагается в свой ряд Фурье

$$u(x) = \sum_l a_l e^{i(l, x)}, \quad (5)$$

а оператор дифференцирования по переменной x_k переходит в умножение коэффициентов a_l на число l_k , $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$. Поэтому

$$\|u(x)\|_s^2 = \sum_l |a_l|^2 (1 + |l_1|^2 + \dots + |l_n|^2)^s. \quad (6)$$

Согласно формуле (6) пространство $H_s(T^n)$ изоморфно пространству l_2 числовых последовательностей со сходящимся квадратом с помощью соответствия

$$u(x) \rightarrow \{b_l = a_l (1 + |l_1|^2 + \dots + |l_n|^2)^{s/2}\}. \quad (7)$$

Оператор вложения $H_s \rightarrow H_{s-1}$ с помощью соответствия (7) переходит в оператор

$$l_2 \rightarrow l_2,$$

задаваемый соответствием

$$\{b_l\} \rightarrow \left\{ \frac{b_l}{(1 + |l_1|^2 + \dots + |l_n|^2)^{1/2}} \right\}. \quad (8)$$

Оператор (8), очевидно, является компактным.

Доказательство теоремы 1 для произвольных значений индексов $s_1 < s_2$ технически несколько сложнее, но может быть сведено к формуле, аналогичной формуле (8), с дробным показателем в знаменателе.

Теорема 2. Пусть

$$a(D) : \Gamma^\infty(\xi_1) \rightarrow \Gamma^\infty(\xi_2)$$

— псевдодифференциальный оператор порядка m на компактном многообразии M . Тогда найдется такая константа C , что

$$\|a(D)u\|_{s-m} \leq C \|u\|_s, \quad (9)$$

т.е. оператор

$$a(D) : H_s(\xi_1) \rightarrow H_{s-m}(\xi_2) \quad (10)$$

ограничен.

Теорема 2 очевидна для дифференциальных операторов. Действительно, ограниченность оператора $a(D)$ достаточно доказывать локально, считая, что коэффициенты дифференциального оператора $a(D)$ финитны. Далее,

если $a(D) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, то по формуле (2)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x^i} u(x) \right\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^i}(\xi) \right|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\xi_i \tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s+1} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \|u(x)\|_{s+1}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому оценка (9) получается из неравенства (11) индукцией по числу m .

В общем случае псевдодифференциального оператора оценка (9) тоже может быть получена отдельно в каждой карте многообразия M , но технически более сложным путем.

Применим теоремы 1 и 2 для доказательства фредгольмовости эллиптического оператора. Пусть $a(D)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка m . Его символ

$$a : \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2) \quad (12)$$

согласно определению из § 1 является изоморфизмом расслоений вне некоторой окрестности нулевого сечения касательного расслоения T^*M . Поэтому

можно построить новое отображение

$$b: \pi^*(\xi_2) \rightarrow \pi^*(\xi_1), \quad (13)$$

являющееся обратным к отображению a вне некоторой окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения T^*M . Это новое отображение (13) тоже будет удовлетворять всем условиям (16) из § 1 для символов псевдодифференциальных операторов, если выполнена оценка

$$|\det a(x, \xi)| > C(1 + |\xi|)^m. \quad (14)$$

Пусть $\varphi(x, \xi)$ — гладкая функция на тотальном пространстве T^*M кокасательного расслоения, равная нулю во всех точках, где $\det a(x, \xi) = 0$, и равная тождественно единице вне некоторой окрестности нулевого сечения.

Символ (13) можно задать формулой

$$b(x, \xi) = \varphi(x, \xi) \cdot a^{-1}(x, \xi). \quad (15)$$

Композиция

$$c(x, \xi) = a(x, \xi) b(x, \xi)$$

является символом, который отличается от тождественного символа на финитное по переменной ξ слагаемое. Тогда, очевидно, выполнено условие: операторы

$$a(D)b(D) - 1 \quad \text{и} \quad b(D)a(D) - 1$$

являются псевдодифференциальными операторами порядка (-1) .

Т е о р е м а 3. Пусть псевдодифференциальный оператор $a(D)$ порядка m эллиптический, т.е. удовлетворяет условию (15). Тогда он фредгольмов как оператор

$$\sigma(D): H_s(\xi_1) \rightarrow H_{s-m}(\xi_2),$$

действующий в соболевских пространствах. Индекс оператора $\sigma(D)$ не зависит от номера s соболевского пространства.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор, символ которого равен $(1 + |\xi|^2)^{k/2}$. Если k четно, то это дифференциальный оператор. Обозначим его через $(1 + \Delta^2)^k$. Очевидно, что норма $\|(1 + \Delta^2)^k u\|_s$ эквивалентна норме $\|u\|_{s+2k}$, значит, оператор

$$(1 + \Delta^2)^k: H_{s+2k}(\xi) \rightarrow H_s(\xi)$$

является изоморфизмом. Тогда оператор

$$A = (1 + \Delta^2)^{-k} \sigma(D) (1 + \Delta^2)^k: H_{s+2k}(\xi_1) \rightarrow H_s(\xi_1) \rightarrow \\ \rightarrow H_{s-m}(\xi_2) \rightarrow H_{s+2k-m}(\xi_2)$$

отличается от оператора $\sigma(D)$ на компактный оператор и имеет тот же индекс.

С л е д с т в и е. Ядро эллиптического оператора $\sigma(D)$ состоит из бесконечно гладких сечений.

В самом деле, увеличивая номер s соболевского пространства, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_s(\xi_1) & \xrightarrow{\sigma(D)} & H_{s-m}(\xi_2) \\ \cup & & \cup \\ H_{s+1}(\xi_1) & \xrightarrow{\sigma(D)} & H_{s+1-m}(\xi_2) \end{array}$$

Значит, при увеличении номера s размерность ядра $\text{Ker } \sigma(D)$ может только уменьшиться. Аналогично, поскольку коядро оператора $\sigma(D)$ совпадает с ядром сопряженного оператора $\sigma(D)^*$, размерность коядра тоже может только уменьшиться. Поскольку индекс фредгольмова оператора $\sigma(D)$ не зависит от номера s соболевского пространства, то размерность ядра, а потому и само ядро не меняется при изменении номера s .

§ 4. Формула Атья—Зингера для индекса эллиптического оператора

Эллиптический оператор $\sigma(D)$ задается символом

$$\sigma: \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2), \quad (1)$$

который является изоморфизмом вне некоторой окрестности нулевого сечения кокасательного расслоения T^*M , т.е. вне некоторого компакта, ибо многообразие предполагается компактным. Значит, он задает тройку $(\pi^*(\xi_1), \sigma, \pi^*(\xi_2))$, определяющую элемент

$$[\sigma] = (\pi^*(\xi_1), \sigma, \pi^*(\xi_2)) \in K_c(T^*M). \quad (2)$$

Т е о р е м а 1. Индекс $\text{index } \sigma(D)$ фредгольмова оператора $\sigma(D)$ зависит только от элемента $[\sigma]$, задаваемого формулой (2) в группе $K_c(T^*M)$.

Доказательство очевидно: при непрерывных гомотопиях символа получаются непрерывные деформации фредгольмова оператора, а индекс при непрерывных деформациях фредгольмовых операторов не меняется. Всякий оператор порядка m можно представить как композицию обратимого оператора и оператора нулевого порядка. Если символ σ (нулевого порядка) является изоморфизмом во всех точках кокасательного расслоения T^*M , то оператор $\sigma(D)$ имеет нулевой индекс, поскольку оператор $\sigma(D)$ гомотопен тождественному оператору. Если символ $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ является прямой суммой символов σ_1 и σ_2 , то $\sigma(D) = \sigma(D_1) \oplus \sigma(D_2)$, т.е. $\text{index } \sigma(D) = \text{index } \sigma_1(D) + \text{index } \sigma_2(D)$. Таким образом, индекс фредгольмова оператора корректно задает аддитивный гомоморфизм

$$\text{index}: K_c(T^*M) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Формула Атья — Зингера описывает гомоморфизм (3).

Многообразие T^*M имеет естественную структуру почти комплексного многообразия. Поэтому к отображению $p: M \rightarrow \text{pt}$ многообразия M в точку применима конструкция прямого образа, т.е. существует гомоморфизм

$$p_*: K_c(T^*M) \rightarrow K_c(\text{pt}) = \mathbb{Z}, \quad (4)$$

описанный в § 3 главы 4.

Т е о р е м а 2. Для эллиптических псевдодифференциальных операторов справедлива формула

$$\text{index } \sigma(D) = p_*[\sigma]. \quad (5)$$

Формулу (5) можно переписать, применяя теорему Римана — Роха, поскольку $p_*[\sigma] = \text{ch } p_*[\sigma]$. Тогда

$$\text{index } \sigma(D) = (\text{ch } [\sigma] T^{-1}(T^*M), [T^*M]), \quad (6)$$

где $[T^*M]$ — фундаментальный (некомпактный) цикл многообразия T^*M . Если M — ориентируемое многообразие, то имеется изоморфизм Тома в целочисленных когомологиях $\varphi: H^*(M) \rightarrow H_c^*(T^*M)$. Поэтому формулу (6)

можно переписать в следующем виде:

$$\text{index } \sigma(D) = (\varphi^{-1} \text{ch} [\sigma] T^{-1} (T^*M), [M]). \quad (7)$$

Последняя формула и была установлена Атья и Зингером [1].

Доказательство формулы Атья — Зингера технически достаточно сложно. Известные доказательства основаны на исследовании алгебраических и топологических свойств левой и правой частей формулы (5). В частности, теорема 1 показывает, что левая и правая части формулы (5) являются линейными функциями на группе $K_c(T^*M)$.

Пусть $i: M_1 \rightarrow M_2$ — вложение гладких компактных многообразий, $\sigma_1(M)$ — некоторый эллиптический оператор на многообразии M_1 , символ которого σ_1 определяет элемент $[\sigma_1] \in K_c(T^*M_1)$. Пусть σ_2 — такой символ эллиптического оператора на многообразии M_2 , что

$$[\sigma_2] = i_*[\sigma_1]. \quad (8)$$

Т е о р е м а 3. Для эллиптических операторов $\sigma_1(D)$ и $\sigma_2(D)$ на многообразиях M_1 и M_2 , символы которых связаны соотношением (8), справедливо равенство

$$\text{index } \sigma_1(D) = \text{index } \sigma_2(D). \quad (9)$$

Теорема 2 вытекает из теоремы 3. В самом деле, если $M_1 = \text{pt}$ — точка, то теорема 2 выполняется автоматически, поскольку всякий оператор $\sigma(D): \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^l$

эллиптивен, а его символ $\sigma = \sigma(D)$ определяет элемент $[\sigma] \in K_c(\text{pt})$ по формуле $[\sigma] = k - l = \text{index } \sigma(D)$.

Пусть $M_2 = S^n$, $i: \text{pt} \rightarrow S^n$ — вложение точки в n -мерную сферу. Тогда прямой образ

$$i_*: K_c(\text{pt}) \rightarrow K_c(T^*S^n, T_{s_0}^*)$$

является изоморфизмом. Следовательно, по теореме 3, если

$$[\sigma] \in K_c(T^*S^n, T_{s_0}^*), \quad [\sigma] = i_*[\sigma'], \quad \text{то} \quad [\sigma'] = p_*[\sigma] \\ \text{и} \quad \text{index } \sigma(D) = \text{index } \sigma'(D) = [\sigma'] = p_*([\sigma]), \quad (10)$$

т.е. теорема 2 справедлива для эллиптических операторов на сфере S^n .

Наконец, если $i: M \rightarrow S^n$ — некоторое вложение, $q: S^n \rightarrow \text{pt}$ — естественная проекция, $p = qi$, $i_*([\sigma]) = [\sigma']$, то по теореме 3

$$\text{index } \sigma(D) = \text{index } \sigma'(D) = q_*[\sigma'] = q_*i_*[\sigma] = p_*[\sigma]. \quad (11)$$

Таким образом, формула Атья — Зингера вытекает из теоремы 3.

Теорему 3 поясним на примере, когда нормальное расслоение $\nu(M_1 \subset M_2)$ вложения многообразия M_1 в многообразие M_2 тривиально. Символ $[\sigma_2] = i_*[\sigma_1]$ является изоморфизмом вне некоторой трубчатой окрестности подмногообразия $M_1 \subset T^*M_2$. Поскольку эллиптический оператор $\sigma_2(D)$ определяется по символу неоднозначно, подберем оператор $\sigma_2(D)$ нулевого порядка таким образом, чтобы вне некоторой трубчатой окрестности $U \subset M_2$ подмногообразия M_1 оператор $\sigma_2(D)$ совпадал с действием самого символа σ_2 при $\xi = 0$. Другими словами, потребуем выполнения следующего условия: если $\text{Supp } u \cap U = \emptyset$, то

$$\sigma_2(D)(u)(x) = \sigma_2(x, 0)u(x). \quad (12)$$

Тогда мы можем заменить многообразие M_2 на декартово произведение $M_1 \times T^k$, где T^k — k -мерный тор, причем $k = \dim M_2 - \dim M_1$. При такой

замене многообразия M_2 индекс оператора $\sigma_2(D)$ не изменится. Теперь будем подбирать оператор $\sigma_2(D)$ в виде тензорного произведения оператора $\sigma_1(D)$, действующего на многообразии M_1 , и операторов $\tau_k(D)$, действующих на сомножителях S^1 тора $T^k = S^1 \times \dots \times S^1$. Потребуем также, чтобы операторы $\tau_k(D)$ коммутировали между собой и оператором $\sigma_1(D)$ и чтобы индекс каждого оператора $\tau_k(D)$ равнялся единице, а символ $[\tau_k] \in K_c(T^*S^1)$ был образующим элементом в группе $K_c(T^*S^1) = \mathbb{Z}$. Тогда, очевидно,

$$i_*([\sigma_1]) = [\sigma_1] \otimes [\tau_1] \otimes \dots \otimes [\tau_k] = [\sigma_2]$$

и

$$\begin{aligned} \text{index } \sigma_2(D) &= \text{index } (\sigma_1(D) \hat{\otimes} \tau_1(D) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \tau_k(D)) = \\ &= \text{index } \sigma_1(D) \text{index } \tau_1(D) \dots \text{index } \tau_k(D) = \text{index } \sigma_1(D). \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к доказательству существования эллиптического оператора $\tau(D)$ на окружности, индекс которого равен единице, а символ $[\tau]$ определяет образующий элемент группы $K_c(T^*S^1)$.

В этой главе содержатся сведения о различных задачах, в которых естественным образом возникают векторные расслоения. Эти приложения не претендуют на полноту, но в большей мере соответствуют интересам автора. Тем не менее мы надеемся, что изложенные нами примеры в достаточной степени демонстрируют, насколько теория векторных расслоений оказывается полезной как один из геометрических методов.

§ 1. Сигнатуры многообразий

Сигнатурой компактного ориентированного $4n$ -мерного многообразия X называется сигнатура квадратичной формы, которая задается в пространстве $2n$ -мерных рациональных кохомологий $H^{2n}(X; \mathbb{Q})$ с коэффициентами в поле рациональных чисел формулой

$$(x, y) = \langle xy, [X] \rangle, \quad (1)$$

где $x, y \in H^{2n}(X; \mathbb{Q})$, $[X]$ — фундаментальный $4n$ -мерный цикл многообразия X , а $\langle xy, [X] \rangle$ — значение коцикла xy на цикле $[X]$. В силу двойственности Пуанкаре квадратичная форма (1) невырождена. С другой стороны, поскольку $xy = yx^*$, форма (1) симметрична, поэтому она приводится к диагональному виду с помощью некоторой линейной замены координат в линейном пространстве $H^{2n}(X; \mathbb{Q})$. Напомним, что сигнатурой формы (1) называется разность числа положительных и числа отрицательных квадратов формы (1) после приведения ее к диагональному виду.

Если вместо рациональных кохомологий взять кохомологии с вещественными коэффициентами, то сигнатура квадратичной формы в пространстве $H^{2n}(X; \mathbb{R})$ совпадает с вышеопределенной сигнатурой.

Далее, на пути обобщений вместо квадратичной формы на кохомологиях в средней размерности $H^{2n}(X)$ можно рассмотреть билинейную форму на всей группе кохомологий $H^*(X) = \bigoplus_{k=0}^{4n} H^k(X)$, которую определим

по той же формуле (1), считая, что значение класса кохомологий размерности, меньшей $4n$, на фундаментальном цикле равно нулю. Получится невырожденная билинейная форма. Условие симметричности, конечно, не будет выполняться, но если разложить пространство $H^*(X)$ в правую сумму четномерных и нечетномерных кохомологий:

$$H^*(X) = H^{\text{чет}}(X) \oplus H^{\text{неч}}(X),$$

то билинейная форма тоже разложится в прямую сумму симметрической формы на $H^{\text{чет}}(X)$ и кососимметрической формы на $H^{\text{неч}}(X)$. Условимся

*) Так как x, y — четномерные классы кохомологий.

считать, что сигнатура кососимметрической формы равна нулю. Тогда сигнатура многообразия X равна сигнатуре билинейной формы на пространстве $H^*(X)$. В самом деле, значение билинейной формы (1) отлично от нуля, только если $x \in H^k(X)$, а $y \in H^{4n-k}(X)$. Таким образом, матрица формы (1) на $H^{\text{чет}}(X)$ разлагается в прямую сумму форм на пространствах $H^0(X) \oplus H^{4n}(X)$, $H^2(X) \oplus H^{4n-2}(X)$, ..., $H^{2n-2}(X) \oplus H^{2n+2}(X)$, $H^{2n}(X)$, причем на всех слагаемых, кроме последнего, эта матрица имеет следующий матричный вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Сигнатура же у матрицы вида (2) равна нулю. Значит, сигнатура формы (1) на всем пространстве $H^*(X)$ совпадает с сигнатурой формы (1) на оставшемся слагаемом $H^{2n}(X)$.

Т е о р е м а 1. Если ориентируемое компактное $4n$ -мерное многообразие X является границей ориентируемого компактного $(4n+1)$ -мерного многообразия Y , то

$$\text{sign } X = 0. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку группы гомологий с вещественными (или рациональными) коэффициентами можно представить в виде

$$H_k(X) = \text{Hom}(H^k(X); \mathbb{R}), \quad (4)$$

то билинейную форму (1) можно задать как изоморфное отображение

$$D: H^k(X) \rightarrow H_{4n-k}(X), \quad (5)$$

которое в точности совпадает с гомоморфизмом двойственности Пуанкаре для многообразия X . Многообразие Y тоже обладает двойственностью Пуанкаре, которая задается двумя изоморфизмами

$$D': H^k(Y) \rightarrow H_{4n+1-k}(Y, X), \quad (6)$$

$$D'': H^k(Y, X) \rightarrow H_{4n+1-k}(Y). \quad (7)$$

Для пары (Y, X) можно написать точные последовательности пары как в гомологиях, так и в когомологиях, которые вместе с изоморфизмами (5) – (7) образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(Y, X) & \xrightarrow{j^*} & H^k(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X) & \xrightarrow{\partial} & H^{k+1}(Y, X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow D'' & & \downarrow D' & & \downarrow D & & \downarrow D'' & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{4n+1-k}(Y) & \xrightarrow{j^*} & H_{4n+1-k}(Y, X) & \xrightarrow{\partial} & H_{4n-k}(X) & \xrightarrow{i^*} & H_{4n-k}(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (8)$$

Рассмотрим среднюю размерность $k = 2n$. Размерность образа $\text{Im } i^* \subset H^{2n}(X)$ вычисляется как альтернированная сумма размерностей всех предыдущих групп в верхней строке диаграммы (8):

$$\begin{aligned} \dim \text{Im } i^* &= \dim H^{2n}(Y) - \dim H^{2n}(Y, X) + \dim H^{2n-1}(X) - \\ &- \dim H^{2n-1}(Y) + \dim H^{2n-1}(Y, X) - \dim H^{2n-2}(X) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Используя правую часть нижней строки диаграммы (8), получаем аналогично значение коразмерности образа $\text{Im } i^*$:

$$\text{Codim } \text{Im } i^* = \text{Codim } \text{Im } \partial = \text{Codim } \text{Ker } i_* =$$

$$= \dim H_{2n}(Y) - \dim H_{2n}(Y, X) + \dim H_{2n-1}(X) - \\ - \dim H_{2n-1}(Y) + \dim H_{2n-1}(Y, X) - \dim H_{2n-2}(X) + \dots \quad (10)$$

Поскольку $\dim H^k(X) = \dim \text{Hom}(H^k(X); \mathbb{R}) = \dim H_k(X)$, то из (9) и (10) следует, что

$$\dim \text{Im } i^* = \text{Codim Im } i^* = \frac{1}{2} \dim H^{2n}(X). \quad (11)$$

Разложим группу $H^k(X)$ в прямую сумму:

$$H^{2k}(X) = A \oplus B, \quad \dim A = \dim B, \quad (12)$$

где $A = \text{Im } i^*$, B — некоторое алгебраическое дополнение. Тогда

$$H_{2n}(X) = \text{Hom}(H^2(X); \mathbb{R}) = A^* \oplus B^*$$

и

$$B^* = \text{Ker } i_* \quad (13)$$

В силу коммутативности диаграммы (8) получаем

$$i_* D i^* = i_* \delta D' = 0. \quad (14)$$

Это значит, что $D(A) \subset B^*$, т.е. симметрическая матрица изоморфизма D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}, \quad D_3 = D_2^t. \quad (15)$$

Очевидно, что сигнатура матрицы (15) равна нулю, поскольку матрица D эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$F = \frac{1}{2} D_3^{-1} D_4.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 показывает, что сигнатура многообразия X зависит только от класса ориентируемого бордизма многообразия X и, значит, должна выражаться только через характеристические числа многообразия X , т.е. должен существовать такой многочлен $L(X)$ от классов Понтрягина многообразия X , что

$$\text{sign}(X) = \langle L(X), [X] \rangle. \quad (16)$$

Один из способов нахождения явного вида многочлена $L(X)$ заключается в том, чтобы истолковать сигнатуру многообразия X в виде индекса некоторого канонического эллиптического оператора, заданного на многообразии X . Такой оператор существует и называется *оператором Хинцебруха*.

Перейдем к его построению. Рассмотрим над многообразием X его кокасательное расслоение T^*X и проекцию $\pi: T^*X \rightarrow X$. Обозначим через Λ_k k -ю внешнюю степень кокасательного расслоения T^*X . Таким образом, Λ_0 — это тривиальное расслоение, Λ_1 — это само кокасательное расслоение

T^*X . Можно рассмотреть прямую сумму $\Lambda = \bigoplus_{l=0}^{4n} \Lambda_l$, которая в каждом

слое обладает структурой алгебры, а умножение задается операцией внешнего произведения кососимметрических форм. Очевидно, пространство сечений $\Gamma(\Lambda_k)$ совпадает с пространством внешних k -мерных дифференциальных форм на многообразии X . Комплекс де Рама

$$0 \rightarrow \Gamma(\Lambda_0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda_1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda_{4n}) \rightarrow 0 \quad (17)$$

является комплексом дифференциальных операторов первого порядка, а гомологии комплекса де Рама совпадают с когомологиями многообразия X с вещественными коэффициентами.

Нетрудно убедиться, что символ оператора d является гомоморфизмом

$$\wedge i\xi: \pi^*(c\Lambda_k) \rightarrow \pi^*(c\Lambda_{k+1})$$

внешнего умножения на вектор $i\xi \in c\Lambda_1$ в точке $\xi \in T^*X = \Lambda_1$, где $c\Lambda_k$ — комплексификация расслоения Λ_k . Если $\xi \neq 0$, то комплекс символов

$$0 \rightarrow \pi^*(c\Lambda_0) \xrightarrow{\wedge i\xi} \pi^*(c\Lambda_1) \rightarrow \dots \rightarrow \pi^*(c\Lambda_{4n}) \rightarrow 0 \quad (18)$$

является точным комплексом, а комплекс (17), следовательно, является эллиптическим комплексом дифференциальных операторов.

Заметим далее, что операция умножения в когомологиях многообразия X индуцируется операцией внешнего умножения дифференциальных форм. Таким образом, сигнатура многообразия X определяется билинейной формой в когомологиях, которая индуцируется спариванием в пространстве всех дифференциальных форм с помощью следующего равенства:

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (19)$$

Фиксируем некоторую риманову метрику на многообразии X . Риманова метрика задает скалярное произведение во всех расслоениях Λ_k таким образом, что если e_1, \dots, e_{4n} — ортонормированный базис в слое расслоения Λ_1 , то в слое расслоения Λ_k векторы $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ тоже образуют ортонормированный базис. Рассмотрим отображение

$$*: \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{4n-k}, \quad (20)$$

сопоставляющее вектору $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ вектор $(-1)^\sigma e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{4n-k}}$, составленный из сомножителей $e_{j_1}, \dots, e_{j_{4n-k}}$, дополняющих векторы e_{i_1}, \dots, e_{i_k} до базиса e_1, \dots, e_{4n} , где σ — четность перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{4n-k})$. Таким образом, $*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = (-1)^\sigma (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{4n-k}})$. С другой стороны, $*(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{4n-k}}) = (-1)^{\sigma_1} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$, где σ_1 — четность перестановки $(j_1, \dots, j_{4n-k}, i_1, \dots, i_k)$. Четности $(-1)^\sigma$ и $(-1)^{\sigma_1}$ отличаются друг от друга на множитель $(-1)^{k(4n-k)} = (-1)^k$. Таким образом, получаем формулу

$$*^2 = (-1)^k \text{ на } \Lambda_k. \quad (21)$$

Отображение (20) переносится и на сечения расслоений, порождая отображения пространств дифференциальных форм

$$*: \Gamma(\Lambda_k) \rightarrow \Gamma(\Lambda_{4n-k}). \quad (22)$$

Пусть в локальной системе координат (x^1, \dots, x^{4n}) риманова метрика имеет компоненты $g_{ij}(x^1, \dots, x^{4n})$. Обозначим через μ форму объема на многообразии X , т.е. форму, которая в локальной системе координат

имеет вид

$$\mu = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{4n}. \quad (23)$$

Очевидно, что $\mu = *(1)$, а если $\omega_2 = f\omega_1$, где f — некоторая функция, то $*(\omega_2) = f*(\omega_1)$.

Если $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(\Lambda_k)$ — два сечения, то через $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ обозначим функцию, равную скалярному произведению значений форм ω_1 и ω_2 в каждой точке. Тогда выполняется формула

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \mu = \omega_1 \wedge * \omega_2 = (-1)^k * \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (24)$$

В самом деле, формулу (24) достаточно проверять в каждой точке независимо и в произвольно выбранной системе координат. Выберем локальные координаты x^1, \dots, x^{4n} таким образом, чтобы их дифференциалы dx^1, \dots, dx^{4n} в данной точке x_0 образовывали ортонормированный базис. Тогда

$$\mu(x_0) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{4n}.$$

Пусть

$$\omega_1 = \sum \omega_{1\alpha_1 \dots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k},$$

$$\omega_2 = \sum \omega_{2\alpha_1 \dots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

Тогда

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle (x_0) \mu(x_0) = (\sum \omega_{1\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_0) \omega_{2\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_0)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{4n}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge * \omega_2 &= \sum (\omega_{1\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_0) dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}) \wedge \\ &\wedge (\omega_{2\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_0) (-1)^\sigma dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{4n-k}}), \end{aligned} \quad (26)$$

где $(\beta_1, \dots, \beta_{4n-k})$ — выбор индексов, дополнительный к набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, а σ — четность перестановки $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{4n-k})$. Значит,

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} \wedge dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{4n-k}} = (-1)^\sigma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{4n}. \quad (27)$$

Сравнивая (25) с (26) и (27), получаем формулу (24).

Формулу (24) перепишем следующим образом:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^k \langle \omega_1, * \omega_2 \rangle \mu \quad (28)$$

для $\omega_1 \in \Gamma(\Lambda_k)$, $\omega_2 \in \Gamma(\Lambda_{4n-k})$. Квадратичная форма (19) может быть вычислена по формуле

$$(\omega_1, \omega_2) = (-1)^k \int \langle \omega_1, * \omega_2 \rangle \mu. \quad (29)$$

Интеграл от формы $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \mu$ задает скалярное произведение в пространстве форм $\Gamma(\Lambda_k)$, которое мы будем также обозначать через

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \mu. \quad (30)$$

Через d^* обозначим оператор, сопряженный к оператору внешнего дифференцирования d относительно скалярного произведения (30) на формах $\Gamma(\Lambda_k)$. Для оператора d^* выполняется тождество

$$\langle \omega_1, d\omega_2 \rangle \equiv \langle d^* \omega_1, \omega_2 \rangle, \quad \omega_1 \in \Gamma(\Lambda_k), \quad \omega_2 \in \Gamma(\Lambda_{k-1}). \quad (31)$$

Используя соотношения (29) между скалярным произведением и оператором $*$, имеем

$$\begin{aligned} \langle d^* \omega_1, \omega_2 \rangle &= \langle \omega_1, d\omega_2 \rangle = \int_X \omega_1 \wedge *d\omega_2 = (-1)^k \int_X * \omega_1 \wedge d\omega_2 = \\ &= \int_X d(*\omega_1 \wedge \omega_2) - \int_X d^* \omega_1 \wedge \omega_2 = \\ &= - \int_X d^* \omega_1 \wedge \omega_2 = - \int_X * d^* \omega_1 \wedge * \omega_2 = - \langle * d^* \omega_1, \omega_2 \rangle. \end{aligned}$$

Значит,

$$d^* = - * d *. \quad (32)$$

Теперь мы произведем отождествление когомологий де Рама многообразия X с ядром некоторого эллиптического оператора. Заметим, что оператор

$$\Delta = (d + d^*)(d + d^*) = d^*d + dd^* \quad (33)$$

является дифференциальным оператором в каждом пространстве $\Gamma(\Lambda_k)$. Оператор Δ коммутирует с операторами d и d^* . Определим соболевскую норму в пространствах $\Gamma(\Lambda_k)$ равенствами

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_s = \langle \omega_1, (1 + \Delta)^s \omega_2 \rangle = \int_X \langle \omega_1, (1 + \Delta)^s \omega_2 \rangle \mu, \quad (34)$$

$$\|\omega\|_s^2 = \langle \omega, \omega \rangle_s, \quad s \geq 0,$$

где $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(\Lambda_k)$. Пополнение по норме (34) обозначим через $H_s(\Lambda_k)$. Очевидно, что оператор

$$(1 + \Delta)^l: H_s(\Lambda_k) \rightarrow H_{s-2l}(\Lambda_k)$$

является изоморфизмом для $s - 2l \geq 0$. Если $\omega \in H_{s-2l}(\Lambda_k)$ — бесконечно гладкое сечение, то и прообраз $((1 + \Delta)^l)^{-1} \omega \in H_s(\Lambda_k)$ является бесконечно гладким сечением. Значит, оператор $(1 + \Delta)^l$ является изоморфизмом на бесконечно гладких сечениях $\Gamma(\Lambda_k)$. Поэтому формула (34) имеет смысл и для отрицательных значений s . Далее, если $\omega_1 \in H_s(\Lambda_k)$, то для любого $\omega_2 \in H_{-s}(\Lambda_k)$ определено спаривание $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_0$, которое на гладких сечениях выражается формулой (30). При этом, если $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_0 = 0$ для любого элемента $\omega_2 \in H_{-s}(\Lambda_k)$, то $\omega_1 = 0$.

Т е о р е м а 2. Оператор $D = d + d^*: \Gamma(\Lambda) \rightarrow \Gamma(\Lambda)$ является эллиптическим. Ядро оператора $D: H_s(\Lambda) \rightarrow H_{s-1}(\Lambda)$ состоит из бесконечно гладких сечений. Имеет место разложение в пространстве $\Gamma(\Lambda)$:

$$\text{Ker } d = \text{Ker } D \oplus \text{Im } d. \quad (35)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\omega \in \text{Ker } D$, то $0 = (d + d^*)^2 \omega = dd^* \omega + d^*d\omega$. Значит,

$$0 = \langle dd^* \omega + d^*d\omega, \omega \rangle = \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle + \langle d\omega, d\omega \rangle.$$

Поэтому $d\omega = d^* \omega = 0$. Если же при этом $\omega = d\omega'$ для некоторой гладкой формы $\omega' \in \Gamma(\Lambda)$, то $d^*d\omega' = 0$. Поэтому $0 = \langle d^*d\omega', \omega' \rangle = \langle d\omega', d\omega' \rangle$. Следовательно, $\omega = d\omega' = 0$.

Первые два утверждения теоремы непосредственно вытекают из результатов предыдущей главы, поскольку символ оператора $D = d + d^*$ является обратимой матрицей вне нулевого сечения кокасательного расслоения.

Рассмотрим фредгольмов комплекс операторов

$$\dots \rightarrow H_{s+1}(\Lambda_{k-1}) \xrightarrow{d} H_s(\Lambda_k) \xrightarrow{d} H_{s-1}(\Lambda_{k+1}) \rightarrow \dots \quad (36)$$

Образ $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$ является замкнутым подпространством конечной размерности. Пусть $L \subset \text{Ker } d$ — ортогональное дополнение к подпространству $\text{Im } d$ в метрике (33). Тогда, если $\omega \in L$, то $d\omega = 0$ и $\langle d\omega_1, \omega \rangle_s = 0$ для любого элемента $\omega_1 \in H_{s+1}(\Lambda_{k-1})$, т.е., в частности, $\langle (1 + \Delta)^s d\omega_1, \omega \rangle_0 = 0$ для любого элемента $\omega_1 \in \Gamma(\Lambda_{k-1})$. Значит, $\langle (1 + \Delta)^s \omega_1, d^k \omega \rangle_0 = 0$ для любого $\omega_1 \in \Gamma(\Lambda_{k-1})$. Поскольку оператор $(1 + \Delta)^s$ является изоморфизмом в пространстве $\Gamma(\Lambda_{k-1})$, получаем равенство $\langle \omega', d^k \omega \rangle_0 = 0$ для любого $\omega' \in \Gamma(\Lambda_{k-1})$. Следовательно, $d^k \omega = 0$. Итак, $(d + d^*)\omega = 0$, т.е. $L \subset \text{Ker } D$. Обратно, если $D\omega = 0$, то ω — гладкое сечение, поэтому $d\omega = d^* \omega = 0$. Значит, $\langle d\omega_1, \omega \rangle_s = 0$ для любого $\omega_1 \in \Gamma(\Lambda_{k-1})$. Таким образом, $L = \text{Ker } D$.

Рассмотрим теперь эллиптический оператор

$$\Delta = D^2: \Gamma(\Lambda_k) \rightarrow \Gamma(\Lambda_k).$$

Очевидно, что $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } D$. Если $\omega \in \Gamma(\Lambda_k)$, то $\omega \in H_s(\Lambda_k)$. Разложим форму ω в сумму ортогональных слагаемых:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (37)$$

$$\omega_2 \in \text{Ker } D \subset H_s(\Lambda_k), \quad \omega_1 \in D(H_{s-2}(\Lambda_k)).$$

Очевидно, что разложение (37) не зависит от номера s , поскольку элемент ω_2 ортогонален к ω_1 в любой норме вида (33). Пусть $\omega_1 \in D(\Omega)$, $\Omega \in H_{s+2}(\Lambda_k)$. Элемент Ω уже зависит, вообще говоря, от номера s , но если $\Omega' \in H_{s'+2}(\Lambda_k)$ и $\omega_1 = D(\Omega')$, $s' > s$, то $\Omega - \Omega' \in \text{Ker } D$. Значит, форма Ω отличается от формы Ω' на бесконечно гладкое слагаемое, т.е. $\Omega \in H_{s'+2}(\Lambda_k)$ для любого $s' > s$, а потому $\Omega \in \Gamma(\Lambda_k)$. Таким образом, пространство $\Gamma(\Lambda_k)$ разлагается в прямую сумму:

$$\Gamma(\Lambda_k) = \text{Ker } D \oplus \Delta(\Gamma(\Lambda_k)). \quad (38)$$

Пусть теперь $\omega \in \text{Ker } d \subset \Gamma(\Lambda_k)$. Разложим форму ω в сумму:

$$\omega = \omega_1 + \Delta\omega_2, \quad \omega_1 \in \text{Ker } D, \quad \omega_2 \in \Gamma(\Lambda_k).$$

Тогда $d\omega = d\omega_1 + \Delta d\omega_2$, т.е. $\Delta d\omega_2 = 0$. Значит, $d\omega_2 \in \text{Ker } D$, т.е. $d^* d\omega_2 = 0$, откуда следует, что $0 = \langle d^* d\omega_2, \omega_2 \rangle = \langle d\omega_2, d\omega_2 \rangle$, поэтому $d\omega_2 = 0$. Тогда

$$\omega = \omega_1 + dd^* \omega_2. \quad (39)$$

Разложение (39) и доказывает формулу (35). Теорема 2 полностью доказана.

Согласно теореме 2 группа кохомологий $H^k(X)$ изоморфна ядру $\text{Ker } D$ в пространстве $\Gamma(\Lambda_k)$. В частности, когда $k = 2n$, квадратичная форма на группе $H^{2n}(X)$ задается формулой

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 = \int_X \langle \omega_1, * \omega_2 \rangle \mu = \langle \omega_1, * \omega_2 \rangle. \quad (40)$$

Оператор $*$: $\Gamma(\Lambda_k) \rightarrow \Gamma(\Lambda_k)$ в силу формулы (32) оставляет ядро $\text{Ker } D$ инвариантным. Действительно, если $\omega \in \text{Ker } D$, $(d + d^*)\omega = 0$, то $(d + d^*)*\omega = -*(d + d^*)\omega = 0$, т.е. $*\omega \in \text{Ker } D$. Значит, сигнатура квадратичной формы (40) равна сигнатуре оператора $*$, действующего в пространстве $\text{Ker } D$.

Заменим оператор $*$ на новый оператор

$$\alpha = j^{k(k-1)+2n} *: \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{4n-k} \quad (41)$$

(отметим, что число $j^{k(k-1)+2n}$ вещественно). Оператор α удовлетворяет следующим свойствам:

$$\alpha^2 = 1, \quad (42)$$

$$d^* = -\alpha d\alpha, \quad (43)$$

$$\alpha D = -D\alpha. \quad (44)$$

Разложим расслоение $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{4n} \Lambda_k$ в сумму двух расслоений:

$$\Lambda = \Lambda^+ \oplus \Lambda^- \quad (45)$$

так, чтобы на первом слагаемом оператор α был тождественным, а на втором слагаемом равнялся -1 . Очевидно, что в силу соотношения (44) имеют место включения

$$D(\Gamma(\Lambda^+)) \subset \Gamma(\Lambda^-), \quad (46)$$

$$D(\Gamma(\Lambda^-)) \subset \Gamma(\Lambda^+). \quad (47)$$

Ограничение оператора D на подпространство $\Gamma(\Lambda^+)$ обозначим через D^+ , а на подпространство $\Gamma(\Lambda^-)$ — через D^- . Совершенно ясно, что

$$\text{Ker } D = \text{Ker } D^+ \oplus \text{Ker } D^-. \quad (48)$$

С другой стороны, ядро $\text{Ker } D$ можно разложить в прямую сумму своих подпространств, лежащих в сумме пространств дифференциальных форм $\Gamma(\Lambda_k) \oplus \Gamma(\Lambda_{4n-k})$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{Ker } D = & \{H^0(X) \oplus H^{4n}(X)\} \oplus \{H^1(X) \oplus H^{4n-1}(X)\} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \{H^{2n-1}(X) \oplus H^{2n+1}(X)\} \oplus H^{2n}(X). \end{aligned} \quad (49)$$

Разложение (48) согласовано с разложением (49). Поэтому каждое слагаемое вида $H^k(X) \oplus H^{4n-k}(X)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств:

$$H^k(X) \oplus H^{4n-k}(X) = V_+^k \oplus V_-^k, \quad (50)$$

где V_{\pm}^k — корневые подпространства оператора α с собственными значениями ± 1 . Оператор $*$ задается на пространстве (50) матрицей

$$* = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix},$$

причем квадрат этой матрицы согласно формуле (21) равен $(-1)^k$, т.е. $AB = (-1)^k$. Значит, оператор α задается матрицей

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+n} B^{-1} \\ (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+n} B & 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Очевидно, что матрица (51) имеет равное число собственных значений $+1$ и -1 .

Таким образом, сигнатура многообразия X равна разности размерностей $\dim \text{Ker } D^+$ и $\dim \text{Ker } D^-$:

$$\text{sign } X = \dim \text{Ker } D^+ - \dim \text{Ker } D^-. \quad (52)$$

С другой стороны, поскольку оператор D самосопряжен, то оператор D^- сопряжен к оператору D^+ . Значит, размерность ядра $\text{Ker } D^-$ равна размерности коядра оператора D^+ , и потому

$$\text{sign } X = \text{index } D^+. \quad (53)$$

Оператор $D^+ : \Gamma(\Lambda_+) \rightarrow \Gamma(\Lambda_-)$ называется *оператором Хирцебруха*. Его индекс можно вычислять, используя формулу Атья — Зингера. Конструкция оператора D^+ такова, что его символ может быть легко описан. В самом деле, символ σ оператора d внешнего дифференцирования — это операция внешнего умножения на ковектор $i\xi$:

$$\sigma = \Lambda i\xi : \pi^*(c\Lambda_k) \rightarrow \pi^*(c\Lambda_{k+1}).$$

Так же, как и в формуле (32), символ σ' сопряженного оператора d^* равен

$$\sigma' = - * \sigma *, \quad (54)$$

а символ оператора D равен $\Sigma = \sigma + \sigma'$. Поэтому для символа Σ выполняется равенство, аналогичное равенству (44):

$$\alpha \Sigma = - \Sigma \alpha. \quad (55)$$

Следовательно, оператор

$$\Sigma : \pi^*(c\Lambda_+) \rightarrow \pi^*(c\Lambda_-) \quad (56)$$

является изоморфизмом вне нулевого сечения кокасательного расслоения T^*X . Тройка (56) задает нам некоторый элемент $[\Sigma] \in K_c(T^*X)$ в K -группе с компактными носителями тотального пространства T^*X . Характеристические классы элемента $[\Sigma]$, очевидно, выражаются через характеристические классы расслоения cT^*X . В частности, характеристический класс, определяющий индекс оператора D^+ , имеет следующий вид:

$$\text{index } D^+ = \langle \text{ch } [\Sigma] T(X), [T^*X] \rangle, \quad (57)$$

где $T(X)$ — класс Тодда комплексификации касательного расслоения к многообразию X .

Для того чтобы вычислить правую часть формулы (57), заметим, что конструкция элемента $[\Sigma]$, задаваемого тройкой (56), может быть распространена на любое ориентированное вещественное расслоение ξ над произвольной базой X . Если E — тотальное пространство расслоения ξ , а $p : E \rightarrow X$ — проекция, то над базой E имеется комплекс расслоений

$$0 \rightarrow p^*\Lambda_0(c\xi) \xrightarrow{\sigma} p^*\Lambda_1(c\xi) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} p^*\Lambda_n(c\xi) \rightarrow 0, \quad (58)$$

где σ — операция внешнего умножения на вектор $x \in E$. В расслоении

$\Lambda(\xi) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k(\xi)$, так же как и для кокасательного расслоения, имеется

операция $*$: $\Lambda_k(\xi) \rightarrow \Lambda_{n-k}(\xi)$, приводящая к разложению расслоения $\Lambda(c\xi)$ в прямую сумму:

$$\Lambda(c\xi) = \Lambda_+(\xi) \oplus \Lambda_-(\xi).$$

При этом гомоморфизм $\Sigma = \sigma - * \sigma *$ отображает слагаемое $\Lambda_+(\xi)$ в слагаемое $\Lambda_-(\xi)$ изоморфно вне нулевого сечения.

Заметим, что если $X = X_1 \times X_2$, а расслоение ξ является декартовым произведением расслоения ξ_1 над базой X_1 и расслоения ξ_2 над базой X_2 , то

$$[\Sigma(\xi)] = [\Sigma(\xi_1)] \otimes [\Sigma(\xi_2)]. \quad (59)$$

Доказательство формулы (59) оставим в качестве упражнения.

Таким образом, задача сводится к описанию элемента $[\Sigma(\xi)] \in K_c(E)$, где ξ — двумерное универсальное расслоение над классифицирующим пространством $BSO(2) = BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$. В этом случае расслоение ξ изоморфно одномерному комплексному расслоению Хопфа, а $c\xi = \xi \oplus \xi^*$. Значит, $\Lambda_+(\xi) = \bar{1} \oplus \xi^*$, $\Lambda_-(\xi) = \xi \oplus \bar{1}$. Матричная запись функции склейки $\Sigma: \Lambda_+(\xi) \rightarrow \Lambda_-(\xi)$ имеет диагональный вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},$$

где z — вектор слоя комплексного расслоения ξ . Поэтому элемент $[\Sigma] \in K_c(E)$ имеет вид $[\Sigma] = ([\eta] - 1) \oplus (1 - [\eta^*]) = [\eta] - [\eta^*]$, где η — расслоение Хопфа над комплексом Тома $\xi^{\mathbb{C}P^\infty} = \mathbb{C}P^\infty$. Значит,

$$\text{ch}[\Sigma] = e^\alpha - e^{-\alpha}, \quad \alpha \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}).$$

Таким образом, если расслоение ξ разложено в сумму двумерных расслоений:

$$\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n,$$

то

$$\text{ch}(\Sigma(\xi)) = \prod_{k=1}^n (e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}) = \varphi \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} \right),$$

где $\varphi: H^*(X) \rightarrow H_c^*(\xi^X)$ — изоморфизм Тома. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\text{ch}(\Sigma)T(X)) &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{e^{\alpha_k} - 1} \cdot \frac{(-\alpha_k)}{e^{-\alpha_k} - 1} \cdot \frac{e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k(e^{-\alpha_k} + 1)}{e^{-\alpha_k} - 1} = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\text{th}(\alpha_k/2)} = 2^n \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k/2}{\text{th}(\alpha_k/2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $4n$ -мерного многообразия

$$L(X) = 2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \frac{t_k/2}{\text{th}(t_k/2)}, \quad (60)$$

где t_k — формальные образующие касательного расслоения к многообразию X .

§ 2. C^* -алгебры и K -теория

Пространство сечений $\Gamma(\xi)$ комплексного векторного расслоения ξ над базой B является модулем над кольцом $C(B)$ всех непрерывных функций на базе B . Само кольцо $C(B)$ можно отождествить с пространством сечений $\Gamma(\bar{1})$ одномерного тривиального расслоения. Значит, $\Gamma(\bar{1})$ является одномерным свободным модулем. Поскольку тривиальное расслоение \bar{n} разлагается в прямую сумму тривиальных одномерных расслоений, модуль $\Gamma(\bar{n})$ является n -мерным свободным $C(B)$ -модулем. С другой стороны, если B —

компактное пространство, то всякое комплексное векторное расслоение ξ является прямым слагаемым в тривиальном расслоении, т.е. $\xi \oplus \eta = \bar{n}$. Тогда имеет место такое же разложение пространства сечений:

$$\Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta) = \Gamma(\bar{n}) = C(B)^n = C(B) \oplus \dots \oplus C(B).$$

Это значит, что $\Gamma(\xi)$ является проективным $C(B)$ -модулем.

Т е о р е м а 1. *Соответствие $\xi \rightarrow \Gamma(\xi)$ является эквивалентностью между категорией комплексных векторных расслоений над компактной базой B и категорией проективных конечнопорожденных модулей над алгеброй $C(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если расслоения ξ и η изоморфны, то изоморфны и их модули сечений $\Gamma(\xi)$ и $\Gamma(\eta)$. Поэтому достаточно доказать, что каждый проективный $C(B)$ -модуль P изоморфен модулю $\Gamma(\xi)$ для некоторого векторного расслоения ξ , а каждый гомоморфизм $C(B)$ -модулей

$$\varphi: \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\eta)$$

порождается гомоморфизмом расслоений

$$f: \xi \rightarrow \eta.$$

Докажем сначала второе утверждение. Пусть $\varphi: \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\eta)$ — произвольный гомоморфизм модулей. Предположим, что расслоения ξ и η тривиальны, $\xi = B \times \mathbb{C}^n$, $\eta = B \times \mathbb{C}^m$. Обозначим через $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$ и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}^m$ некоторые базисы. Поскольку расслоения ξ и η тривиальны, векторам a_k, b_k соответствуют сечения $\bar{a}_k \in \Gamma(\xi)$, $\bar{b}_k \in \Gamma(\eta)$. Всякое сечение $\sigma \in \Gamma(\xi)$ однозначно разлагается в линейную комбинацию

$$\sigma = \sum_k \sigma^k(x) \bar{a}_k, \quad \sigma^k(x) \in C(B), \quad (1)$$

а всякое сечение $\tau \in \Gamma(\eta)$ однозначно разлагается в линейную комбинацию

$$\tau = \sum_l \tau^l(x) \bar{b}_l, \quad \tau^l(x) \in C(B). \quad (2)$$

Поэтому гомоморфизм φ в базисах (1) и (2) имеет следующий вид:

$$\varphi(\sigma) = \sum_k \sigma^k(x) \varphi(\bar{a}_k) = \sum_k \sigma^k(x) \sum_l \varphi_k^l(x) \bar{b}_l = \sum_{k,l} \sigma^k(x) \varphi_k^l(x) \bar{b}_l. \quad (3)$$

Функции $\varphi_k^l(x) \in C(B)$ образуют матричнозначную функцию на базе B , по которой определяется послойный гомоморфизм расслоений

$$f = \|\varphi_k^l(x)\|: \xi \rightarrow \eta. \quad (4)$$

Очевидно, что гомоморфизм f индуцирует исходный гомоморфизм φ в сечениях расслоений.

Пусть теперь ξ и η — произвольные векторные расслоения, а $\varphi: \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\eta)$ — некоторый гомоморфизм модулей сечений. Дополним расслоения ξ и η до тривиальных расслоений. Пусть

$$\xi \oplus \xi_1 = \bar{n}, \quad \eta \oplus \eta_1 = \bar{m}, \quad (5)$$

$p: \bar{n} \rightarrow \bar{n}$ — проекция на слагаемое ξ , $q: \bar{m} \rightarrow \bar{m}$ — проекция на слагаемое η . Определим гомоморфизм $\psi: \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\xi_1) \rightarrow \Gamma(\eta) \oplus \Gamma(\eta_1)$ матрицей в разложении (5):

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Очевидно, что $\psi p = q\psi$. Гомоморфизм ψ является гомоморфизмом модулей сечений тривиальных расслоений. Следовательно, по уже доказанному существует гомоморфизм

$$g: \xi \oplus \xi_1 \rightarrow \eta \oplus \eta_1,$$

порождающий гомоморфизм (6). Поскольку $\psi p = q\psi$, такое же соотношение выполняется и для гомоморфизма g , т.е. $gp = qg$. Поэтому гомоморфизм g имеет вид диагональной матрицы:

$$g = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $f = qgp$ — гомоморфизм расслоения ξ в расслоение η . Значит, гомоморфизм $f: \xi \rightarrow \eta$ порождает гомоморфизм φ модулей сечений.

Докажем теперь первое утверждение теоремы. Пусть P — произвольный проективный конечнопорожденный модуль над алгеброй $C(B)$. Тогда модуль P является прямым слагаемым свободного модуля $C(B)^n = \Gamma(\bar{n})$:

$$P \oplus Q = \Gamma(\bar{n}), \quad (8)$$

а сам модуль P выделяется в модуль $\Gamma(\bar{n})$ с помощью проектора

$$\varphi: \Gamma(\bar{n}) \rightarrow \Gamma(\bar{n}), \quad \varphi^2 = \varphi, \quad P = \text{Im } \varphi. \quad (9)$$

Проектор φ порождается некоторым гомоморфизмом ψ тривиального расслоения \bar{n} . Поскольку $\varphi^2 = \varphi$, то и $\psi^2 = \psi$, т.е. ψ является проектором, а \bar{n} разлагается в сумму двух подрасслоений:

$$\bar{n} = \xi \oplus \eta. \quad (10)$$

Тогда, очевидно, $\text{Im } \varphi = \Gamma(\xi)$, т.е.

$$P = \Gamma(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 показывает, что группа $K(B)$ комплексных векторных расслоений изоморфна группе $K_0(C(B))$ в алгебраической K -теории для кольца $C(B)$.

Соответствие $\xi \rightarrow \Gamma(\xi)$, рассмотренное в теореме 1, можно обобщить на случай декартова произведения $B = X \times Y$ компактных пространств X и Y . Пусть ξ — векторное расслоение над базой B . Фиксируем точку $y_0 \in Y$. Тогда пространство сечений $\Gamma(\xi, (X \times y_0))$ ограничения расслоения ξ над $X \times y_0$ является проективным модулем над кольцом $C(X)$. Таким образом, получаем семейство проективных модулей $\Gamma(\xi, (X \times y_0))$, параметризованных точками пространства Y . Мы приходим к определению локально тривиального расслоения над базой Y , слоем которого является проективный $C(X)$ -модуль $P = \Gamma(\xi, (X \times y_0))$, а структурной группой — группа автоморфизмов модуля P .

Вообще, если A — произвольная C^* -алгебра, P — проективный A -модуль, то локально тривиальное расслоение над базой Y со структурной группой $G = \text{Aut}_A(P)$ автоморфизмов модуля P будем называть *векторным A -расслоением*. Соответствующую группу Гротендика, порожденную всеми векторными A -расслоениями, будем обозначать через $K_A(X)$. Если X — одноточечное пространство, $X = \text{pt}$, то группа $K_A(\text{pt})$ совпадает с группой $K_0(A)$ в алгебраической K -теории. Если $B = X \times Y$, то возникает естественный изоморфизм

$$K(X \times Y) \rightarrow K_{C(Y)}(X). \quad (11)$$

Если Y — одноточечное пространство, то изоморфизм (11) превращается в изоморфизм

$$K(X) \rightarrow K_{C(X)}(\text{pt}) = K_0(C(X)) \quad (12)$$

из теоремы 1.

Теорема 1 тоже обобщается на случай векторных A -расслоений. Если ξ — произвольное векторное A -расслоение над базой Y , то модуль сечений $\Gamma(\xi)$ является проективным модулем над алгеброй непрерывных функций $C(Y, A)$ на базе Y со значением в C^* -алгебре A . Значит, имеем следующий изоморфизм:

$$K_A(Y) = K_0(C(Y, A)). \quad (13)$$

Если $B = X \times Y$, $A = C(Y)$, то

$$C(Y, C(X)) = C(X \times Y).$$

Тогда, используя изоморфизмы (11) и (13), получаем коммутативную диаграмму изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K(X \times Y) & \xrightarrow{\quad} & K_0(C(X \times Y)) \\ \downarrow & & \parallel \\ K_{C(X)}(Y) & \xrightarrow{\quad} & K_0(C(Y, C(X))) \end{array}$$

Группы $K_A(X)$ удовлетворяют многим соотношениям, аналогичным соотношениям обычной комплексной K -теории. Если ξ — некоторое A -расслоение над базой X , а η — обычное C -расслоение над Y , то тензорное произведение $\xi \otimes \eta$ является A -расслоением над $X \times Y$. Значит, получается отображение

$$K_A(X) \otimes K(Y) \rightarrow K_A(X \times Y).$$

В частности, умножение на элемент Ботта $\beta \in K^0(S^2, s_0)$ задает изоморфизм

$$K_A(X, Y) \xrightarrow{\otimes \beta} K_A(X \times D^2, (X \times S) \cup (Y \times D^2)),$$

а также изоморфизм

$$K_A^n(X, Y) \xrightarrow{\otimes \beta} K_A^{n-2}(X, Y). \quad (15)$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$K_A(\text{pt}) \otimes K(X) \rightarrow K_A(X), \quad (16)$$

порожденный тензорным умножением. Переходя к тензорному произведению на поле рациональных чисел \mathbb{Q} , получаем естественное преобразование обобщенных теорий когомологий

$$\varphi: K_A^*(\text{pt}) \otimes \mathbb{Q} \otimes K^*(X) \rightarrow K_A^*(X) \otimes \mathbb{Q}. \quad (17)$$

Если $X = \text{pt}$ — одноточечное пространство, то, очевидно, преобразование (17) является изоморфизмом. Поэтому на основании теоремы о единственности обобщенной теории когомологий получаем, что преобразование (17) является изоморфизмом для любого конечного клеточного пространства X . Положим

$$\text{ch}_A = (\text{id} \otimes \text{ch})\varphi^{-1}: K_A^*(X) \rightarrow H^*(X; K_A^*(\text{pt}) \otimes \mathbb{Q}).$$

Преобразование ch_A является аналогом характера Черна для обычной K -теории и удовлетворяет условию, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} K_A^*(X) \otimes K^*(X) & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & K_A^*(X) \\ \downarrow ch_A \otimes ch & & \downarrow ch_A \\ H^*(X; K_A^*(pt) \otimes \mathbb{Q}) \otimes H^*(X; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & H^*(X; K_A^*(pt) \otimes \mathbb{Q}) \end{array}$$

Пример. Алгебра Калкина. C^* -алгебра Калкина — это фактор-алгебра $A = B(H) / \mathcal{K}(H)$ алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве по идеалу компактных операторов. Чтобы изучить устройство группы $K_A(X)$, достаточно рассматривать только расслоение для нетривиальной пары (X, Y) , слоем которых являются свободные A -модули. В этом случае A -расслоение имеет структурную группу $GL(n, A)$, т.е. группу обратимых n -мерных матриц, элементы которых лежат в алгебре A . Алгебра $End(A^n)$ n -мерных матриц, очевидно, изоморфна алгебре A , поскольку для бесконечномерного гильбертова пространства H имеет место изоморфизм $H = H \oplus \dots \oplus H$ (n раз). Значит, группа $GL(n, A)$ изоморфна группе $GL(1, A) = GL(A)$ обратимых элементов в алгебре A . Если $\pi: B(H) \rightarrow A$ — естественная проекция, то, очевидно, прообраз $\pi^{-1}(GL(A))$ совпадает с множеством \mathcal{F} всех фредгольмовых операторов гильбертова пространства, а проекция $\pi: \mathcal{F} \rightarrow GL(A)$ является расслоением со слоем $\mathcal{K}(H)$, удовлетворяющим аксиоме о накрывающей гомотопии. Допустим, что мы вычисляем группу

$$K_A^{-1}(X, x_0) = K_A^0(X \times D^1, (x_0 \times D^1) \cup (X \times S^0)).$$

Надстройку $S^1 X$ пространства X удобнее в данном случае представить в виде объединения $C_0 X \cup C_1 X$ двух конусов с общим основанием. Всякий элемент из группы $K_A^{-1}(X, x_0)$ представляем в виде разности A -расслоения ξ над $S^1 X$ со слоем A^n и тривиального n -мерного A -расслоения. Ограничения $\xi|_{C_0 X}$ и $\xi|_{C_1 X}$ являются тривиальными расслоениями. Поэтому расслоение ξ полностью определяется гомотопическим классом отображения $X \rightarrow GL(A)$. Поскольку проекция $\pi: \mathcal{F} \rightarrow GL(A)$ имеет стягиваемый в точку слой $\pi^{-1}(x)$, группа гомотопических классов отображений пространства X в группу $GL(A)$ изоморфна группе гомотопических классов отображений пространства X в пространство \mathcal{F} :

$$\pi: [X, \mathcal{F}] \rightarrow [X, GL(A)]. \quad (19)$$

Пусть $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ — непрерывное отображение. Тогда отображение f индуцирует отображение тривиального расслоения со слоем H :

$$\bar{f}: X \times H \rightarrow X \times H.$$

Отображение \bar{f} задается равенством

$$\bar{f}(x, h) = (x, f_x(h)). \quad (20)$$

Допустим, что подпространства $\text{Ker } f_x$ и $\text{Coker } f_x$ имеют постоянную размерность:

$$\dim \text{Ker } f_x \equiv \text{const}, \quad \dim \text{Coker } f_x \equiv \text{const}. \quad (21)$$

Пусть подмножество $E \subset X \times H$ образовано точками вида (x, h) , $f_x(h) = 0$, а $E' \subset X \times H$ образовано точками (x, h) , $h \perp \text{Im } f_x$. Тогда отображения

$E \rightarrow X, E' \rightarrow X$ являются локально тривиальными векторными расслоениями, которые мы обозначим через $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$.

Т е о р е м а 2. *Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ гомотоп-но отображению f' , удовлетворяющему условию (21). Элемент*

$$[\text{Ker } f'] - [\text{Coker } f'] \in K(X)$$

не зависит от выбора отображения f' , гомотопного отображению f и удовлетворяющего условию (21). Соответствие

$$f \rightarrow [\text{Ker } f'] - [\text{Coker } f']$$

является взаимно однозначным соответствием множеств

$$[X, \mathcal{F}] \rightarrow K(X). \quad (22)$$

Из теоремы 2 следует, что имеет место естественный изоморфизм

$$K_A^{-1}(X, x_0) = K^0(X, x_0). \quad (23)$$

В самом деле, элемент группы $K_A^{-1}(X, x_0)$ определяется отображением $f: X \rightarrow \text{GL}(A)$. Это отображение можно без ограничения общности выбрать таким, чтобы $f(x_0) = e \in \text{GL}(A)$. Это значит, что накрывающее его отображение $\bar{f}: X \rightarrow \mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\text{index } \bar{f}_x \equiv 0$. Значит, $\dim \text{Ker } \bar{f}' = \dim \text{Coker } \bar{f}'$, т.е. $[\text{Ker } \bar{f}'] - [\text{Coker } \bar{f}'] \in K^0(X, x_0)$. В частности, из равенства (23) следует, что $K_A^n(\text{pt}) = K_A^{n-1}(\text{pt})$, значит, $K_A^{2k+1}(\text{pt}) = \mathbb{Z}$, $K_A^{2k}(\text{pt}) = 0$. Например, $K_A^0(\text{pt}) = 0$ означает, что для любого проективного модуля P над алгеброй A найдется такой свободный модуль A^n , что $P \oplus A^n = A^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Допустим, что $\text{Ker } f_x = 0$ для всех точек $x \in X$. Тогда $\dim \text{Coker } f_x \equiv \text{const}$, поскольку индекс фредгольмова оператора не меняется при гомотопиях. Известно, что ортогональное дополнение $(\text{Im } f_x)^\perp \subset H$ к образу оператора f_x совпадает с ядром сопряженного оператора f_x^* , а $\text{Ker } f_x^* = \text{Ker } f_x f_x^*$. Образ $\text{Im } f_x f_x^*$ оператора $f_x f_x^*$ замкнут и совпадает с образом $\text{Im } f_x$ оператора f_x . Значит, $\text{Ker } f_x f_x^* = (\text{Im } f_x f_x^*)^\perp$. Следовательно, на подпространстве $\text{Im } f_x f_x^*$ самосопряженный оператор $f_x f_x^*$ обратим. Поэтому точка 0 является изолированной точкой спектра оператора $f_x f_x^*$. В силу компактности пространства X существует единая для всех $x \in X$ окрестность нуля, отделяющая нуль от остальной части спектра оператора $f_x f_x^*$. Формула

$$P_x = \frac{1}{2\pi i} \oint (f_x f_x^* - z)^{-1} dz \quad (24)$$

задает непрерывное семейство проекторов гильбертова пространства H на $\text{Ker } f_x f_x^*$. Очевидно, что подпространство

$$E' = \bigcup_{x \in X} (x \times \text{Im } P_x) \subset X \times H$$

образует искомое локально тривиальное расслоение.

Пусть теперь $f: X \rightarrow \mathcal{F}$ — произвольное непрерывное отображение. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и $V = (\text{Ker } f_{x_0})^\perp$. Тогда f_{x_0} изоморфно отображает пространство V на образ $\text{Im } f_{x_0}$. Значит, найдется такая окрестность $U \ni x_0$, что если точка x принадлежит окрестности U , то $f_x|_V$ является мономорфизмом, т.е. $\text{Ker } f_x \cap V = 0$. Следовательно, существует такое подпространство $V \subset H$ конечной коразмерности, что $\text{Ker } f_x \cap V = 0$ для любой точки

$x \in X$. Пусть $V_0 = V^\perp$ — ортогональное дополнение. Тогда операторы f_x записываются в виде матрицы согласно разложению гильбертова пространства H в прообразе в прямую сумму $H = V_0 \oplus V$:

$$f_x = \begin{pmatrix} f_x^0 & f_x^1 \end{pmatrix},$$

где $f_x^0 = f_x|_{V_0}$, $f_x^1 = f_x|_V$, $\text{Ker } f_x^1 = 0$. Положим $f'_x = \begin{pmatrix} 0 & f_x^1 \end{pmatrix}$. Тогда $\text{Ker } f'_x$ — тривиальное расслоение размерности $\dim V_0$, а $\text{Coker } f'_x = \text{Coker } f_x^1$. Если $V_1 \subset V$ — некоторое подпространство, то $V = V_1 \oplus V_2$, а отображение f_x представляется в виде матрицы:

$$f_x = \begin{pmatrix} f_x^0 & f_x^{11} & f_x^{12} \end{pmatrix}, \quad f_x^1 = \begin{pmatrix} f_x^{11} & f_x^{12} \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$\text{Coker } f_x^{11} = \text{Coker } f_x^1 \oplus \overline{\dim V_2}.$$

Значит, определение элемента

$$\text{index } f = [\text{Ker } f'] - [\text{Coker } f'] \in K(X) \quad (25)$$

не зависит от выбора подпространства V . Очевидно, что отображение f' гомотопнo отображению f . Если задана гомотопия $f: X \times I \rightarrow \mathcal{F}$, то, используя аналогичные рассуждения, получим гомотопию $f': X \times I \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющую условию (21), а значит, элемент (25) не зависит от гомотопии.

Итак, по формуле (25) мы построили отображение

$$\text{index}: [X, \mathcal{F}] \rightarrow K(X). \quad (26)$$

Пусть ξ — произвольное расслоение над компактной базой X , η — дополнительное расслоение к расслоению ξ , значит, $\xi \oplus \eta = \bar{N}$ — тривиальное расслоение. Гильбертово пространство H представим в виде счетной суммы:

$$H = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^N \oplus \dots \quad (27)$$

Пусть $p: \bar{N} \rightarrow \bar{N}$ — семейство проекторов, $\text{Im } p = \xi$. Отображение (26) является гомоморфизмом, если в качестве групповой операции в множестве $[X, \mathcal{F}]$ использовать операцию композиции фредгольмовых операторов. Семейство фредгольмовых операторов f_x зададим бесконечной матрицей в разложении (27):

$$f_x = \begin{pmatrix} 1 - p_x & p_x & & \\ & 1 - p_x & p_x & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 - p_x & p_x & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Очевидно, что $\text{Ker } f = \xi$, $\text{Coker } f = 0$. Поэтому гомоморфизм (26) является эпиморфизмом. Допустим, что $\text{index } f = 0$. Это значит, что найдется такое подпространство $V \subset H = V \oplus V_0$ конечной коразмерности, что $\text{Ker } f_x \cap V = 0$, $f_x = \begin{pmatrix} f_x^0 & f_x^1 \end{pmatrix}$, $f'_x = \begin{pmatrix} 0 & f_x^1 \end{pmatrix}$, а $\text{Coker } f'$ — тривиальное расслоение. Значит, существует непрерывное послойное отображение

$X \times V_0 \xrightarrow{\varphi} X \times H$ на ортогональное дополнение к $\text{Im } f'$. Другими словами, оператор $f''_x = \begin{pmatrix} \varphi_x & f'_x \end{pmatrix}$ является изоморфизмом, т.е. $f''_x \in \text{GL}(H)$. С другой стороны, отображение $f''_x: X \rightarrow \text{GL}(H) \subset \mathcal{F}$ гомотопнo отображению f . Поскольку пространство $\text{GL}(H)$ стягивается в точку, то отображение f'' , а вслед за ним и отображение f гомотопны некоторому постоянному отображению. Теорема 2 доказана.

§ 3. Семейства эллиптических операторов

Если задано непрерывное семейство фредгольмовых операторов $F_x: H \rightarrow H$, $x \in X$, параметризованное точками компактного пространства X , то $\text{index } F_x$ является локально постоянной функцией, не дающей новых гомотопических инвариантов. Если $\dim \text{Ker } F_x \equiv \text{const}$, то сами ядра $\text{Ker } F_x$ образуют, вообще говоря, нетривиальное расслоение $\text{Ker } F$. Аналогично, $\text{Coker } F$ является векторным расслоением. В этом случае под обобщенным индексом семейства фредгольмовых операторов удобно понимать элемент $\text{index } F = [\text{Ker } F] - [\text{Coker } F]$ группы $K(X)$. Классический индекс $\text{index } F_x$ равен, очевидно,

$$\dim [\text{Ker } F] - \dim [\text{Coker } F] = \dim \text{index } F.$$

Для семейства эллиптических операторов $\sigma_x(D)$ его обобщенный индекс $\text{index } \sigma(D) \in K(X)$ можно выразить через символ оператора $\sigma(D)$. Пусть $p: M \rightarrow X$ — локально тривиальное расслоение компактных многообразий, слоем которого является многообразие Y . Пусть ξ_1, ξ_2 — два векторных расслоения над базой M , T_y^*M — векторное расслоение кокасательных векторов к слою Y на многообразии M , $\pi: T_y^*M \rightarrow M$ — соответствующая проекция. Над пространством X зададим векторные (бесконечномерные) расслоения $p_!(\xi_1), p_!(\xi_2)$, слоями которых служат пространства сечений $\Gamma(\xi_1, p^{-1}(x)), \Gamma(\xi_2, p^{-1}(x))$ расслоений ξ_1, ξ_2 над слоем $p^{-1}(x) = Y$. Через $p_!(\xi_i)_s$ обозначим расслоения, ассоциированные с расслоением $p_!(\xi_i)$, но с заменой слоя $\Gamma(\xi_i, p^{-1}(x))$ на его пополнение по s -соболевской норме.

Семейством псевдодифференциальных операторов $\sigma(D)$ порядка m называется гомоморфизм расслоений

$$\sigma(D): p_!(\xi_1) \rightarrow p_!(\xi_2), \quad (1)$$

который над каждой точкой $x \in X$ является псевдодифференциальным оператором порядка m на многообразии $p^{-1}(x) = Y$, действующим из пространства сечений $\Gamma(\xi_1, p^{-1}(x))$ в пространство сечений $\Gamma(\xi_2, p^{-1}(x))$. Требуется, чтобы символы этих операторов задавали общий непрерывный гомоморфизм

$$\sigma: \pi^*(\xi_1) \rightarrow \pi^*(\xi_2) \quad (2)$$

Если гомоморфизм (2) является изоморфизмом вне нулевого сечения расслоения $T_y^*(M)$, то семейство (1) называется *эллиптическим семейством псевдодифференциальных операторов*. Таким образом, если (1) — эллиптическое семейство, то, с одной стороны, оно задает непрерывное семейство фредгольмовых операторов

$$\sigma(D): p_!(\xi_1)_s \rightarrow p_!(\xi_2)_{s-m}, \quad (3)$$

и, с другой стороны, тройка (2) определяет элемент

$$[\sigma] \in K_c(T_y^*(M)). \quad (4)$$

Т е о р е м а. Для эллиптического семейства (1) справедлива формула $\text{index } \sigma(D) = p_![\sigma] \in K(X) \otimes \mathbb{Q}$. (5)

Мы докажем теорему в частном случае, в котором семейство псевдодифференциальных операторов допускает очень простую интерпретацию. Пусть $q: M \rightarrow Y$ — вторая проекция. Через $q_!(\xi)$ обозначим расслоение над Y , слоем которого является пространство сечений $\Gamma(\xi, q^{-1}(y))$. Очевидно, что $\Gamma(q_!(\xi)) = \Gamma(p_!(\xi)) = \Gamma(\xi)$. Каждому расслоению ξ над базой

$X \times X \times Y$ сопоставим $C(X)$ -расслоение $q_1(\xi)$ над базой Y , слоем которого является проективный $C(X)$ -модуль $\Gamma(\xi, q_1^{-1}(y))$. Каждому символу (2) сопоставляем символ

$$q_1(\sigma): \pi^*(q_1(\xi)) \rightarrow \pi^*(q_1(\xi)), \quad (6)$$

который индуцируется гомоморфизмом (2) после перехода к пространству сечений. Эллиптическому символу σ при этом сопоставляется эллиптический символ $q_1(\sigma)$, а элементу $[\sigma] \in K_c(T^*Y \times X \times X)$ соответствует элемент $[q_1(\sigma)] \in K_{C(X),c}(T^*Y)$. Поскольку группы $K_c(T^*Y \times X \times X)$ и $K_{C(X),c}(T^*Y)$ можно отождествить, имеет место равенство

$$K_c(T^*Y \times X \times X) \ni [\sigma] = [q_1(\sigma)] \in K_{C(X),c}(T^*Y). \quad (7)$$

Каждому семейству операторов (1) сопоставим оператор

$$q_1(\sigma)(D): \Gamma(q_1(\xi)) \rightarrow \Gamma(q_1(\xi)), \quad (8)$$

который получается из семейства (1) путем перехода и сечением расслоений. Если перейти к сечениям расслоений в семействе (3), то, очевидно, получаем оператор

$$\Gamma(\sigma(D)): \Gamma(p_1(\xi_1)^s) \rightarrow \Gamma(p_1(\xi_2)^s). \quad (9)$$

Если $\text{Ker } \sigma(D)$ — уже постоянная функция на пространстве X , то $\text{index } \sigma(D)$ определяется как формальная разность двух расслоений $\text{Ker } \sigma(D)$ и $\text{Coker } \sigma(D)$ над базой X . Тогда ядро и коядро оператора (9) суть проективные $C(X)$ -модули, изоморфные пространствам сечений $\Gamma(\text{Ker } \sigma(D))$ и $\Gamma(\text{Coker } \sigma(D))$. Значит, отождествляя $K(X)$ и $K_0(C(X))$, получим равенство

$$K(X) \ni \text{index } \sigma(D) = \text{index } q_1(\sigma)(D) \in K_0(C(X)). \quad (10)$$

Таким образом, доказать формулу (5) для семейств эллиптических операторов — это то же самое, что доказать аналог формулы Атья — Зингера для эллиптических операторов, действующих в A -расслоениях для произвольной C^k -алгебры A :

$$\text{index } q_1(\sigma)(D) = r_1([q_1(\sigma)]) \in K_0(C(X)) \otimes Q, \quad (11)$$

где $r: Y \rightarrow \text{pt}$ — отображение в точку.

Трудности, которые следует здесь преодолеть, связаны с исследованием банаховых пространств сечений $H^s(\xi)$ векторных A -расслоений, пополненных по соболевской норме, и построением разумного класса операторов, заменяющих фредгольмовы операторы таким образом, чтобы для них был определен гомотопический инвариант-индекс оператора как элемент группы $K_0(A)$.

Пусть A — произвольная C^* -алгебра. Гильбертовым A -модулем назовем банахово пространство M , являющееся A -модулем, на котором задана полуторалинейная форма со значением в алгебре A . Пусть выполнены условия:

- 1) $(x, y) = (y, x)^* \in A, \quad x, y \in M;$
- 2) $(x, x) \geq 0, \quad x \in M;$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad x, y \in M, \quad \lambda \in A;$
- 4) $\|x\|^2 = \|(x, x)\|, \quad x \in M.$

Модельный гильбертов A -модуль $l_2(A)$ определим следующим образом. Точка $x \in l_2(A)$ — это такая последовательность $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,

$x_n \in A$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k^*$ сходится по норме в алгебре A , т.е. существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k x_k^* \in A$. Скалярное произведение зададим по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k^*. \quad (12)$$

Ряд, стоящий в правой части (12), сходится, поскольку в C^* -алгебре A выполнено неравенство

$$\left\| \sum_k x_k y_k^* \right\|^2 \leq \left\| \sum_k x_k x_k^* \right\| \left\| \sum_k y_k y_k^* \right\|. \quad (13)$$

Действительно, без ограничения общности можно считать, что C^* -алгебра A изометрична подалгебре в алгебре $B(H)$ ограниченных операторов некоторого гильбертова пространства H . Тогда для произвольных векторов $\xi, \eta \in H$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=N}^{N'} x_k y_k^* \right) \xi, \eta \right|^2 &= \left| \sum_{k=N}^{N'} (y_k^* \xi, x_k^* \eta) \right|^2 \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=N}^{N'} (y_k^* \xi, y_k^* \xi) \right| \left| \sum_{k=N}^{N'} (x_k^* \eta, x_k^* \eta) \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=N}^{N'} y_k y_k^* \right) \xi, \xi \left(\sum_{k=N}^{N'} x_k x_k^* \right) \eta, \eta \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=N}^{N'} y_k y_k^* \right\| \|\xi\|^2 \left\| \sum_{k=N}^{N'} x_k x_k^* \right\| \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя $\eta = \left(\sum_{k=N}^{N'} x_k y_k^* \right) \xi$ в предыдущее неравенство, получаем

$$\left\| \left(\sum_{k=N}^{N'} x_k y_k^* \right) \xi \right\|^2 \leq \left\| \sum_{k=N}^{N'} y_k y_k^* \right\| \left\| \sum_{k=N}^{N'} x_k x_k^* \right\| \|\xi\|^2,$$

или

$$\left\| \left(\sum_{k=N}^{N'} x_k y_k^* \right) \right\|^2 \leq \left\| \sum_{k=N}^{N'} y_k y_k^* \right\| \left\| \sum_{k=N}^{N'} x_k x_k^* \right\|,$$

что и требовалось доказать.

Пространство $l_2(A)$ содержит убывающую систему подпространств $[l_2(A)]_n = \{x : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$. Ограниченный A -линейный оператор $K: l_2(A) \rightarrow l_2(A)$ назовем A -компактным, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K|_{[l_2(A)]_n}\| = 0. \quad (14)$$

Ограниченный A -линейный оператор $F: l_2(A) \rightarrow l_2(A)$ назовем A -фредгольмовым, если существует такой A -линейный ограниченный оператор $G: l_2(A) \rightarrow l_2(A)$, что операторы $FG - 1$ и $GF - 1$ являются A -компактными.

Определения оправдываются следующими утверждениями:

1°. Любой конечнопорожденный проективный A -модуль допускает структуру гильбертова A -модуля.

2°. Пусть ξ — векторное A -расслоение над компактным многообразием X , слоем которого является некоторый конечнопорожденный проективный A -модуль. Тогда пополнение $H^s(\xi)$ пространства сечений $\Gamma(\xi)$ по s -й соболевской норме является гильбертовым модулем, изоморфным прямому слагаемому в $l_2(A)$.

3°. Если $\sigma(D)$ — псевдодифференциальный A -оператор порядка m , действующий из пространства сечений $\Gamma(\xi_1)$ в пространство сечений $\Gamma(\xi_2)$, то он продолжается до ограниченного оператора в соболевских пространствах:

$$\sigma(D): H^s(\xi_1) \rightarrow H^{s-m}(\xi_2).$$

4°. Вложение

$$H^{s+1}(\xi_1) \rightarrow H^s(\xi_1)$$

является A -компактным оператором.

5°. Эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка m :

$$\sigma(D): H^s(\xi_1) \rightarrow H^{s-m}(\xi_2)$$

является A -фредгольмовым.

6°. Пусть H_1, H_2 — два экземпляра гильбертова A -модуля $l_2(A)$, $F: H_1 \rightarrow H_2$ — A -фредгольмов оператор. Тогда существуют такие разложения $H_1 = V_{10} \oplus V_{11}$, $H_2 = V_{20} \oplus V_{21}$, что V_{10}, V_{20} — конечнопорожденные проективные модули, а оператор F имеет следующий матричный вид:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix},$$

причем оператор $F_1: V_{11} \rightarrow V_{21}$ является изоморфизмом. Элемент $\text{index } F = [V_{10}] - [V_{20}] \in K_0(A)$ не зависит от способа разложения пространств H_1 и H_2 . Индекс оператора F не зависит от гомотопии оператора F и от добавления A -компактного слагаемого.

7°. Если $\sigma(D)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор на компактном многообразии X , то

$$\text{index } \sigma(D) = p_*([\sigma]) \in K_0(A) \otimes \mathbb{Q},$$

где $p: X \rightarrow \text{pt}$ — отображение многообразия X в точку, а

$$p_*: K_{A,c}(T^*X) \rightarrow K_A(\text{pt}) = K_0(A)$$

— прямой образ в K_A -теории.

Доказательства утверждений 1° — 7° вполне аналогичны доказательствам утверждений для классических псевдодифференциальных операторов, и мы их опускаем.

§ 4. Фредгольмовы представления дискретных групп

Пусть $\rho: G \rightarrow A$ — представление группы G в C^* -алгебре A . Тогда группа виртуальных представлений $R(G; A)$ естественно отображается в K -группу векторных A -расслоений над классифицирующим пространством:

$$b: R(G; A) \rightarrow K_A(BG). \quad (1)$$

Если взять в качестве C^* -алгебры A алгебру всех ограниченных операторов $B(H)$ гильбертова пространства H , то получим неинтересный вариант гомо-

морфизма из группы бесконечномерных представлений группы G в группу бесконечномерных векторных расслоений над пространством BG . Неинтересность этого варианта связана с тем, что любое бесконечномерное векторное расслоение тривиально.

Однако мы можем рассматривать так называемые "относительные" представления группы G , связанные с гомоморфизмом C^* -алгебр $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$.

Скажем, что нам задано *относительное представление* $\rho \in R(G; \varphi)$, если задана тройка (ρ_1, F, ρ_2) , где $\rho_1, \rho_2: G \rightarrow A_1$ — два представления группы G в алгебре A_1 , а F осуществляет изоморфизм представлений $\varphi\rho_1$ и $\varphi\rho_2$ группы G в алгебре A_2 . Другими словами, F — это такой обратимый элемент алгебры A_2 , что

$$F^{-1}\varphi\rho_1(g)F = \varphi\rho_2(g), \quad g \in G. \quad (2)$$

Каждое представление ρ_1 и ρ_2 определяет векторное A_1 -расслоение над классифицирующим пространством BG . Обозначим эти расслоения через $\xi_1 = b(\rho_1)$ и $\xi_2 = b(\rho_2)$. Ассоциированные с расслоениями ξ_1 и ξ_2 векторные A_2 -расслоения

$$\xi_1 \otimes A_2, \quad \xi_2 \otimes A_2$$

уже изоморфны:

$$b(F): \xi_1 \otimes A_2 \rightarrow \xi_2 \otimes A_2.$$

Тройка $(\xi_1, b(F), \xi_2)$, очевидно, определяет элемент относительных K -групп пространства BG :

$$(\xi_1, b(F), \xi_2) \in K_\varphi(BG).$$

Например, пусть $\varphi: B(H) \rightarrow B(H)/\mathcal{K}(H)$ — естественная проекция алгебры ограниченных операторов в алгебру Калкина $B(H)/\mathcal{K}(H)$, являющаяся факторалгеброй алгебры $B(H)$ по идеалу компактных операторов. Поскольку расслоения ξ_1 и ξ_2 тривиальны, то изоморфизм $b(F)$ порождает непрерывное семейство фредгольмовых операторов F_x , $x \in BG$, а значит, и элемент группы $K(BG)$.

Таким образом, получается гомоморфизм

$$b: R(G, \varphi) \rightarrow K(BG). \quad (3)$$

Относительные представления для проекции алгебр $\varphi: B(H) \rightarrow B(H)/\mathcal{K}(H)$ называются *фредгольмовыми представлениями* группы G .

Поскольку группа $K(BG)$ уже нетривиальна, гомоморфизм (3) может представить новые нетривиальные элементы в группе $K(BG)$. Обычные конечномерные представления группы можно считать частным случаем фредгольмовых представлений. В самом деле, если условие (2) заменить на более сильное требование

$$F\rho_1(g) = \rho_2(g)F, \quad g \in G,$$

для некоторого фредгольмова оператора F , то представления ρ_1 и ρ_2 будут индуцировать два конечномерных представления в ядре $\text{Ker } F$ и коядре $\text{Coker } F$. Очевидно, что

$$b(\text{Ker } F) - b(\text{Coker } F) = b(\rho_1, F, \rho_2) \in K(BG).$$

Рассмотрим, например, дискретную группу $G = \mathbb{Z}^n$. Мы ранее показали, что для любого конечномерного представления ρ группы G расслоение $b(\rho)$

тривиально. Таким образом, гомоморфизм

$$b: R(G) \rightarrow K(BG)$$

отображает группу виртуальных конечномерных представлений в группу Z , порожденную тривиальными расслоениями. Если же увеличить группу представлений, добавив фредгольмовы представления, то гомоморфизм (3) станет эпиморфизмом. Более того, пусть G — такая дискретная группа, что пространство BG является гладким многообразием, допускающим риманову метрику неположительной кривизны. Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а. Гомоморфизм

$$b: R(G, \varphi) \rightarrow K(BG)$$

для указанного класса дискретных групп является эпиморфизмом.

Коммутативные группы $G = Z^n$ попадают в класс групп, описанных в теореме, поскольку многообразие BG в случае $G = Z^n$ является n -мерным тором и допускает плоскую риманову метрику. (См. Мищенко [1] — [3], Мищенко и Соловьев [1], Соловьев [1].)

§ 5. Заключение

Применения векторных расслоений не исчерпываются приведенными примерами в предыдущих параграфах. Приведем еще несколько замечательных примеров использования векторных расслоений.

1. Послойная гомотопическая эквивалентность векторных расслоений. С каждым векторным расслоением ξ над базой X будем связывать расслоение $S(\xi)$, образованное всеми векторами тотального пространства расслоения ξ единичной длины. Два расслоения ξ и η называются *послойно гомотопически эквивалентными*, если существуют такие послойные отображения

$$f: S(\xi) \rightarrow S(\eta), \quad g: S(\eta) \rightarrow S(\xi),$$

что две композиции

$$gf: S(\xi) \rightarrow S(\xi), \quad fg: S(\eta) \rightarrow S(\eta)$$

послойно гомотопны тождественным отображениям.

Приведенное определение оправдывается следующей теоремой (А т ь я [1]).

Т е о р е м а 1. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность гладких замкнутых компактных многообразий, $\nu(X)$, $\nu(Y)$ — нормальные расслоения (одинаковой размерности), то расслоения $\nu(X)$ и $f^*(\nu(Y))$ послойно гомотопически эквивалентны.

В частности, теорема 1 важна для классификации гладких структур данного гомотопического типа гладкого многообразия. Классы послойно гомотопически эквивалентных расслоений образуют группу $J(X)$, являющуюся факторгруппой группы $K(X)$. Задача описания группы $J(X)$ или, точнее, ядра проекции $K(X) \rightarrow J(X)$ может быть решена с помощью кохомологических операций Адамса Ψ^k . Это описание сводится к следующему утверждению, известному под названием *гипотезы Адамса*. Пусть $f(k) \in Z$, $f(k) > 0$ — произвольная целочисленная функция целочисленного аргумента k . Обозначим через $W_f(X) \subset K(X)$ подгруппу, порожденную элементами вида

$$k^{f(k)}(\Psi^k - 1)y, \quad y \in K(X),$$

и пусть

$$W(X) = \bigcap_f W_f(X).$$

Теорема 2 (Квиллен [1], Сулливан [1]). *Имеет место равенство*

$$J(X) = K(X)/W(X).$$

В частности, группы $J(X)$ конечны.

Таким образом, группы $J(X)$ целиком описываются в терминах K -теории и операций Адамса Ψ^k в ней.

2. Погружения многообразий. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — погружение компактного многообразия X в компактное многообразие Y . Тогда, очевидно, нормальное расслоение $\nu(X \rightarrow Y)$ имеет размерность

$$\dim \nu(X \rightarrow Y) = \dim Y - \dim X.$$

Значит, некоторые характеристические классы нормального расслоения обязаны обращаться в нуль. На этом основаны различные критерии невложимости и непогружаемости одного многообразия в другое.

Например, при $n = 2^r$ вещественное проективное пространство RP^n нельзя погрузить в евклидово пространство R^{2n-2} , поскольку у нормального расслоения $\nu(RP^n)$ к многообразию RP^n характеристический класс Штифеля — Уитни $W_{n-1}(\nu(RP^n))$ не равен нулю. Значит, расслоение $\nu(RP^n)$ не может иметь размерность, равную $n - 2$. Пусть $\nu(X)$ — нормальное расслоение к компактному многообразию X . Расслоение $\nu(X)$, вообще говоря, нетривиально, а его размерность зависит от размерности евклидова пространства R^N , в которое вложено многообразие X . Разложим расслоение $\nu(X)$ в сумму:

$$\nu(X) = \nu_0(X) \oplus \bar{n}, \quad (1)$$

где \bar{n} — некоторое тривиальное расслоение. Пусть

$$k = \min \dim \nu_0(X)$$

по всем разложениям (1). Число k назовем *геометрической размерностью* нормального расслоения $\nu(X)$. Очевидно, что многообразие X нельзя вложить в евклидово пространство R^{n+k-1} , $n = \dim X$.

3. Двойственность Пуанкаре в K -теории. Конструкция прямого образа в K -теории может быть интерпретирована точно так же, как и прямой образ в классических когомологиях, с помощью двойственности Пуанкаре. Напомним, что если $f: X_1 \rightarrow X_2$ — гладкое отображение ориентированных компактных многообразий, то прямой образ в классических когомологиях

$$f_*: H^*(X_1) \rightarrow H^*(X_2) \quad (3)$$

можно определить как композицию

$$H^*(X_1) \xrightarrow{D_1} H_*(X_1) \xrightarrow{f_*} H_*(X_2) \xrightarrow{D_2^{-1}} H^*(X_2), \quad (4)$$

где $D_i: H^k(X_i) \rightarrow H_{n_i-k}(X_i)$, $\dim X_i = n_i$, — двойственность Пуанкаре, осуществляющая изоморфизм между группами когомологий и группами гомологий ориентированного многообразия X_i .

Аналогичную конструкцию можно реализовать и в K -теории.

Прежде всего необходимо построить группы гомологий, дуальные к K -группам. Естественно было бы через $K_*(X)$ обозначить группу

$\text{Hom}(K^*(X), Z)$. Однако в этом случае нарушается точность гомологической последовательности пары. Определение групп гомологий для K -теории имеет следующий вид. Рассмотрим естественное преобразование

$$\alpha: K^*(X \times Y) \rightarrow K^*(Y), \quad (5)$$

удовлетворяющее условиям:

- (а) гомоморфизм α является гомоморфизмом $K^*(Y)$ -модулей;
- (б) если $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ — непрерывное отображение, то коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} K^*(X \times Y_1) & \xrightarrow{\alpha} & K^*(Y_1) \\ \downarrow (1 \times f)^* & & \downarrow f^* \\ K^*(X \times Y_2) & \xrightarrow{\alpha} & K^*(Y_2) \end{array} \quad (6)$$

О п р е д е л е н и е. \mathbb{Z}_2 -градуированная группа всех преобразований (3), удовлетворяющих условиям (а) и (б), называется *группой гомологий* в K -теории и обозначается через

$$K_*(X) = K_0(X) \oplus K_1(X).$$

Если X — одноточечное пространство, то всякий класс гомологий (5) является естественным гомоморфизмом модулей: $\alpha: K^*(Y) \rightarrow K^*(Y)$. В частности, если Y — тоже одноточечное пространство, то $K^0(Y) = \mathbb{Z}$ и $\alpha(n) = \alpha(1)n$, $\alpha(1) \in \mathbb{Z}$. Значит, и для произвольного пространства имеем $\alpha(x) = \alpha(1)x$, $\alpha(1) \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$K_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}, \quad K_1(\text{pt}) = 0.$$

Для пары (X, X_0) определим относительную группу гомологий $K_*(X, X_0)$ как группу естественных преобразований

$$\alpha: K^*(X \times Y, X_0 \times Y) \rightarrow K^*(Y),$$

удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям (а) и (б).

Т е о р е м а 2. *Последовательность*

$$\dots \rightarrow K_i(X_0) \xrightarrow{i_*} K_i(X) \xrightarrow{j_*} K_i(X, X_0) \xrightarrow{\delta} K_{i-1}(X_0) \rightarrow \dots \quad (7)$$

точна для любой клеточной пары (X, X_0) .

Теорема 2 показывает, что группы $K_*(X)$ образуют \mathbb{Z}_2 -градуированную теорию гомологий.

Т е о р е м а 3. Пусть X — почти комплексное многообразие. Тогда имеется изоморфизм

$$D: K_c^*(X) \rightarrow K_*(X).$$

Если через $[X]$ обозначить класс $D(1) \in K_*(X)$ для компактного многообразия X , то будет выполнена формула

$$\langle D(x), y \rangle = \langle xy, [X] \rangle, \quad (8)$$

где через $\langle \alpha, x \rangle$ обозначено значение класса гомологий на элементе x при гомоморфизме (5):

$$\alpha: K^*(X) \rightarrow K^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}.$$

Замечательным наблюдением А т ь я [2] является обнаружение того факта, что всякий эллиптический псевдодифференциальный оператор

$\sigma(D)$ задает вполне определенный класс гомологий в K -теории, двойственный элементу $[\sigma] \in K_c(T^*X)$. Этот класс гомологий определяется следующим образом. Пусть η — произвольное векторное расслоение над декартовым произведением $X \times Y$, а оператор $\sigma(D)$ действует в сечениях расслоений $\xi_1, \xi_2, \sigma(D): \Gamma(\xi_1) \rightarrow \Gamma(\xi_2)$. Тогда определим семейство эллиптических операторов

$$\sigma(D) \otimes \eta: \Gamma(\xi_1 \otimes \eta_y) \rightarrow \Gamma(\xi_2 \otimes \eta_y), \quad y \in Y, \quad (9)$$

индекс которого является элементом $K(Y)$. Очевидно, получаем естественное преобразование

$$\text{index}: K(X \times Y) \rightarrow K(Y), \quad (10)$$

которое и задает класс гомологий.

Пространство сечений $\Gamma(\xi \otimes \eta)$ тензорного произведения двух расслоений ξ и η над базой X является модулем над алгеброй $C(X)$ непрерывных функций и изоморфно тензорному произведению модулей:

$$\Gamma(\xi \otimes \eta) = \Gamma(\xi) \otimes_{C(X)} \Gamma(\eta).$$

Для соболевских пополнений получаем аналогичные равенства

$$H^s(\xi \otimes \eta) = H^s(\xi) \hat{\otimes}_{C(X)} H^s(\eta).$$

Оператор (9) определяется однозначно с точностью до компактного слагаемого, поскольку оператор $\sigma(D)$ коммутирует с операцией умножения на функцию $f(x) \in C(X)$ с точностью до компактного слагаемого.

Значит, можно расширить понятие эллиптического оператора. Будем рассматривать произвольный фредгольмов оператор

$$F: H \rightarrow H, \quad (11)$$

коммутирующий с некоторым действием ρ алгебры $C(X)$ с точностью до компактных слагаемых. Всякий оператор вида (11) задает класс $[F, \rho] \in K_0(X)$ по формуле (10). Если $f: X_1 \rightarrow X_2$ — гладкое отображение компактного многообразия X_1 в многообразие X_2 , то по действию ρ_1 алгебры $C(X_1)$ в гильбертовом пространстве H строится действие ρ_2 алгебры $C(X_2)$ посредством формулы $\rho_2(\varphi) = \rho_1(\varphi \circ f)$. Тогда имеет место формула

$$f_*([F, \rho_1]) = [F, \rho_2]. \quad (12)$$

Формула (12) в некоторой степени объясняет, почему в формуле Атья — Зингера возникает прямой образ в K -теории.

4. Исторические замечания. Изучение расслоенных пространств восходит еще к Пуанкаре, к изучению накрытий как примеров нетривиальных расслоений. Первоначально расслоенные пространства (косые произведения) возникли в связи с изучением гладких многообразий, для которых были определены характеристические классы, надолго определившие основные методы изучения расслоений. Характеристические классы Штифеля — Уитни были определены Ш т и ф е л е м [1] и У и т н и [1] в 1935 году для касательных расслоений гладкого многообразия. В дальнейшем У и т н и [2] рассмотрел уже произвольные расслоения со сферическим слоем. Это были характеристические классы расслоений по модулю 2.

Целочисленные же характеристические классы были построены П о н т р я г и н ы м [1]. Им же была установлена классификационная теорема для общих расслоений со структурной группой $O(n)$, $SO(n)$ путем построения универсального расслоения над универсальной базой в виде грассманова многообразия.

Для комплексных расслоений характеристические классы были построены Чженем [1].

Указанные работы положили начало регулярному исследованию расслоенных пространств. Этот период хорошо отражен в книге Стинрода [1].

Поворотным моментом в развитии теории расслоенных пространств было применение открытого Лере аппарата спектральных последовательностей к вычислению групп гомологий расслоенных пространств. Вторым важным моментом является открытие Боттом [1] периодичности в гомотопических группах унитарной и ортогональной групп.

С этого момента векторные расслоения занимают важное место в теории расслоений, поскольку с их помощью были построены нетривиальные теории когомологий. Именно благодаря периодичности Ботта конструкция Гротендика K -групп приобрела такое значение, что оказала обратное влияние на развитие алгебраической K -теории.

Этот период наиболее богат результатами, демонстрирующими силу методов K -теории: была решена проблема векторных полей на сферах, вычислен J -функтор, дана гомотопическая характеристика представлений компактных групп. Этот период связан с такими именами, как Адамс, Атья, Ботт, Хирцебрух, Борель, Годеман, Милнор, Новиков.

Наиболее ярким примером применения K -теории является формула Атья — Зингера [1] для индекса эллиптического оператора. Теория эллиптических операторов породила новую волну работ по применению K -теории к различным задачам.

Современная литература, посвященная применениям теории векторных расслоений, очень обширна, и у нас нет возможности дать ее обзор.

В теории векторных расслоений используются алгебраические понятия двух типов — из линейной алгебры и из гомологической алгебры. Это дополнение является не систематическим изложением, а скорее напоминанием некоторых фактов, в большинстве своем известных читателям.

Пусть A — некоторое ассоциативное кольцо с единицей. Абелева группа M называется A -модулем, если задано линейное действие кольца A на группе M в виде линейных преобразований, т.е. задан гомоморфизм $A \rightarrow \text{End}(M)$ кольца A в кольцо линейных преобразований группы M . Вместо кольца A можно задаться также некоторой группой G и ее гомоморфизмом $G \rightarrow \text{Aut}(M)$ в группу обратимых линейных преобразований группы M . В этом случае говорят, что M является G -модулем.

В частном случае, когда A есть поле вещественных чисел, A -модули M суть не что иное, как вещественные векторные пространства. Если A есть поле \mathbb{C} комплексных чисел, то A -модуль M есть комплексное векторное пространство. В случае же, когда A есть тело кватернионов \mathbb{K} , получаем симплектическое векторное пространство.

Рассматривают также такие кольца A , которые являются векторными пространствами и структуры кольца и векторного пространства согласованы. В этом случае A называется *алгеброй* (над некоторым полем).

В векторном пространстве M рассматривают дополнительные структуры. Одна из них — это структура нормированного пространства. Нормированное пространство называется *полным* (или *банаховым*) *пространством*, если из $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ вытекает, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, т.е.

существует такой элемент x_0 , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Если норма бана-

хова пространства порождается некоторым скалярным произведением (со значением в поле вещественных и комплексных чисел), то M называют *гильбертовым пространством*. Если банахово пространство A является алгеброй, причем для операции умножения выполнено неравенство $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, то алгебра A называется *банаховой алгеброй*. Например, если H — гильбертово пространство (над полем комплексных чисел), то алгебра $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов является банаховой алгеброй. Норма в банаховой алгебре $B(H)$ задается формулой

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in H} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}.$$

В этой алгебре имеется еще одна операция — инволюция $x \rightarrow x^*$. Инволюция $*$ является линейной антикомплексной операцией, т.е.

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \quad (x^*)^* = x,$$

причем выполнены свойства

$$(xy)^* = y^* x^*, \quad \|x\|^2 = \|x^* x\|.$$

Если вышеуказанные условия на инволюцию выполнены для абстрактной банаховой алгебры A , то говорят, что A является C^* -алгеброй. Класс C^* -алгебр удобен потому, что каждая C^* -алгебра изоморфна некоторой подалгебре алгебры $B(H)$ ограниченных линейных операторов, причем изоморфизм сохраняет норму. Поэтому для C^* -алгебр справедливы многие свойства и конструкции, которые имеют место для ограниченных операторов.

Спектром элемента $a \in A$ называется множество $Sp(a)$ таких комплексных чисел z , для которых элемент $a - z \in A$ необратим. Если γ — замкнутая кривая, охватывающая спектр $Sp(a)$, а $f(z)$ — некоторая аналитическая функция, то интеграл

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (a - z)^{-1} f(z) dz \quad (1)$$

определяет на алгебре A функциональное исчисление. Значение интеграла (1) не зависит от выбора кривой γ в классе гомотопных кривых. Следовательно, значение интеграла (1) зависит от значения функции f только в окрестности спектра $Sp(A)$. Далее, если заданы две аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$ и $h(z) = f(z)g(z)$, то

$$h(a) = f(a)g(a) = g(a)f(a). \quad (2)$$

Если же $f(z) \equiv z$, то

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (a - z)^{-1} z dz = a. \quad (3)$$

Таким образом, формула (1) дает естественное значение для функции $f(a)$ в случае, когда $f(z)$ есть многочлен, что следует из формул (2) и (3). С другой стороны, если спектр $Sp(a)$ имеет две компоненты связности, то, полагая $f(z) \equiv 1$ на одной компоненте и в ее окрестности и $f(z) \equiv 0$ в окрестности остатка спектра, мы получаем, что элемент $f(a) \in A$ является проектором, т.е. $(f(a))^2 = f(a)$. Этот проектор можно назвать проектором относительно компоненты спектра $Sp(a)$. В случае, когда A — алгебра матриц n -го порядка, спектр любого элемента a состоит из конечного числа точек, а проектор относительно точки спектра есть не что иное, как проектор P_{λ} на соответствующее корневое подпространство матрицы a . Очевидно, что проектор P_{λ} перестановочен с элементом a . Проекторы P_{λ} разлагают векторное пространство в прямую сумму корневых подпространств, относительно которого матрица a является диагональной.

Разложение оператора a в блочно диагональный вид с помощью проекторов относительно связных компонент спектра $Sp(a)$ связано с функцией $a(z) = a - z$, $z \in \mathbb{C}^1$. Рассмотрим более общую задачу: пусть задана линейная функция $a(z) = a + zb$, $a, b \in A$, $z \in \mathbb{C}^1$. Множество точек $z \in \mathbb{C}^1$, для которых элемент $a(z)$ необратим, обозначим через $Sp(a, b)$. Множество $Sp(a, b)$ замкнуто, но, вообще говоря, неограничено.

Т е о р е м а 1. Пусть $A \subset B(H)$ — C^* -алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, $a(z) = a + zb$, $a, b \in A$, $z \in \mathbb{C}^{-1}$, и пусть при $\|z\| = 1$ элемент $a(z)$ обратим. Тогда существуют такие проекторы $P_0, P_1 \in A$, что $P_0 a(z) = a(z) P_1$ для любого $z \in \mathbb{C}^1$. Оператор $a(z)$ в разложении гильбертова пространства $H = H_1 \oplus H_2$ проекторами P_0 и P_1

имеет блочный вид

$$a(z) = \begin{pmatrix} a_1(z) & 0 \\ 0 & a_2(z) \end{pmatrix},$$

$$a_1(z) = a_1 + zb_1, \quad a_2(z) = a_2 + zb_2.$$

При этом функция $a_1(z)$ обратима при $|z| \leq 1$, функция $a_2(z)$ обратима при $|z| \geq 1$.

Рассмотрим конформное преобразование единичного круга $w = \frac{1 - \alpha z}{z - \alpha}$, где $\alpha > 1$ — такое вещественное число, что $a(\alpha)$ — обратимый элемент. Тогда проекторы P_0 и P_1 можно задать формулами

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} a(z)^{-1} da(z), \quad P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} da(z) a(z)^{-1}. \quad (4)$$

Конечнопорожденный модуль M над алгеброй A называется *проективным*, если он является прямым слагаемым в свободном A -модуле $A^n = A \oplus \dots \oplus A$. Тогда существует такой проектор

$$P: A^n \rightarrow A^n, \quad P \in \text{End}(A, n), \quad P^2 = P,$$

что $M = \text{Im } P$ — образ проектора P . Спектр любого проектора состоит из не более чем двух точек $\{0, 1\}$. Если $C \in \text{End}(A, n)$ — обратимый элемент, то, очевидно, сопряженные проекторы P и $P' = C^{-1}PC$ определяют изоморфные проективные A -модули. Если A — C^* -алгебра, то достаточно близкие проекторы P и P' сопряжены, т.е. $P' = C^{-1}PC$.

Комплексом A -модулей называется такая последовательность модулей M_n , $n \in \mathbb{Z}$, и гомоморфизмов $d_n: M_n \rightarrow M_{n+1}$, что $d_{n+1}d_n = 0$. Это значит, что $\text{Im } d_n \subset \text{Ker } d_{n+1}$. Если $\text{Im } d_n = \text{Ker } d_{n+1}$, то говорят, что комплекс A -модулей ацикличен (или что последовательность точна).

Л е м м а (о пяти изоморфизмах). Пусть задан гомоморфизм ациклических комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

Если гомоморфизмы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ являются изоморфизмами, то и гомоморфизм φ_3 тоже является изоморфизмом.

Модуль M называется *градуированным A -модулем*, если задано разложение модуля M в прямую сумму $M = \bigoplus_n M_n$. Индекс n пробегает при этом мно-

жество всех целых чисел \mathbb{Z} . Слагаемые M_n называются *однородными компонентами* модуля M . Гомоморфизм $\varphi: M \rightarrow N$ градуированных A -модулей называется *однородным*, если существует такое число k , что $\varphi(M_n) \subset N_{n+k}$. В этом случае пишут $\deg \varphi = k$. Если индекс n пробегает группу $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то говорят, что модуль M *биградуирован*. Соответственно, степень однородного гомоморфизма φ является парой целых чисел $\deg \varphi \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и называется *бистепенью*.

Вообще, если индекс n есть элемент абелевой группы G , то говорят, что на модуле M задана *G -градуировка*. В нашем случае в качестве группы G будут встречаться группы \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, \mathbb{Z}_2 .

Комплекс A -модулей с точки зрения градуированных модулей есть не что иное, как \mathbb{Z} -градуированный модуль $M = \bigoplus_n M_n$, на котором задан однородный гомоморфизм $d: M \rightarrow M$ степени 1, $\deg d = 1$, причем $d|_{M_n} = d_n$. Тогда гомоморфизм d удовлетворяет условию

$$d^2 = 0. \quad (5)$$

Гомоморфизм d , удовлетворяющий условию (5), называют дифференциалом. Ясно, что $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$. Поскольку d — однородный гомоморфизм, то модули $\text{Ker } d$ и $\text{Im } d$ являются градуированными, а вложение $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$ однородно степени нуль. Следовательно, фактормодуль

$$H(M, d) = \text{Ker } d / \text{Im } d \quad (6)$$

является градуированным модулем и называется *модулем гомологий* комплекса (M, d) .

Пусть V — векторное пространство размерности n над некоторым полем. Через $\Lambda_k(V)$ обозначим k -ю внешнюю степень пространства V . Пространство $\Lambda_k(V)$ можно понимать как факторпространство тензорной степени $V^k = V \otimes \dots \otimes V$ (k раз) по соотношениям, определяемым элементами

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k) - (-1)^\sigma (v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}),$$

где σ — некоторая перестановка целых чисел $\{1, 2, \dots, k\}$, а $(-1)^\sigma$ равна 1 при четной перестановке σ и -1 при нечетной перестановке σ .

Тогда, если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве V , то в пространстве $\Lambda_k(V)$ базис задается элементами вида

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k},$$

где $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ — произвольный набор индексов, а знак \wedge обозначает образ операции тензорного умножения элементов в пространстве $\Lambda_k(V)$.

Операция тензорного умножения индуцирует операцию \wedge внешнего умножения в прямой сумме

$$\Lambda(V) = \Lambda_0(V) \oplus \Lambda_1(V) \oplus \dots \oplus \Lambda_n(V),$$

превращая пространство $\Lambda(V)$ в косокоммутативную градуированную алгебру. Алгебра $\Lambda(V)$ называется *внешней алгеброй* или *алгеброй топологических многочленов от переменных нечетной степени* над полем вещественных или комплексных чисел. Все эти конструкции можно обобщить на случай свободного модуля $V = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ над кольцом \mathbb{Z} целых чисел.

В общем случае алгебра топологических многочленов имеет вид

$$\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k] \otimes \Lambda(v_1, \dots, v_s),$$

где u_1, \dots, u_k — образующие четной степени, а v_1, \dots, v_s — образующие нечетной степени.

Если $V = V_1 \oplus V_2$, то имеет место разложение

$$\Lambda(V) = \Lambda(V_1) \otimes \Lambda(V_2),$$

т.е.

$$\Lambda_k(V) = \bigoplus_{\alpha + \beta = k} \Lambda_\alpha(V_1) \otimes \Lambda_\beta(V_2).$$

Фиксируем элемент $x_0 \in V$, $\dim V = n > 0$. Рассмотрим комплекс пространств

$$0 \rightarrow \Lambda_0(V) \xrightarrow{d_0} \Lambda_1(V) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{k-1}} \Lambda_k(V) \xrightarrow{d_k} \dots \rightarrow \Lambda_n(V) \rightarrow 0, \quad (7)$$

где

$$d_k(y) = y \wedge x_0, \quad y \in \Lambda_k(V). \quad (8)$$

Т е о р е м а 2. Комплекс (7) точен тогда и только тогда, когда $x_0 \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x_0 = 0$, то согласно (8) имеем $d_k = 0$, т.е. комплекс (7) неточен. Если $x_0 \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что элемент x_0 равен элементу e_1 некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть $y \in \Lambda_k(V)$,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k \leq n} y_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \\ &= \sum_{1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} y_{1 i_2 \dots i_k} e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \\ &+ \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k \leq n} y_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда

$$y \wedge e_1 = (-1)^k \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k \leq n} y_{i_1 \dots i_k} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

Поэтому, если $y \wedge e_1 = 0$, то $y_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ при $i_1 > 1$. Значит,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} y_{1 i_2 \dots i_k} e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \\ &= e_1 \wedge \left(\sum_{1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} y_{1 i_2 \dots i_k} e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right) = \\ &= e_1 \wedge z = (-1)^{k-1} z \wedge e_1, \end{aligned}$$

т.е. $y \in \operatorname{Im} d$. Следовательно, $\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d$, т.е. комплекс (7) точен. Теорема 2 доказана.

Одно и то же векторное пространство может являться модулем над различными полями \mathbb{R} , \mathbb{C} и телом \mathbb{K} . Комплексную структуру в вещественном векторном пространстве V удобно задавать в виде линейного вещественного оператора $I: V \rightarrow V$, $I^2 = -1$. Оператор I задает действие мнимой единицы в пространстве V , так что если $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ — комплексное число, а $x \in V$ — вектор, то $\lambda x = \lambda_1 x + \lambda_2 Ix$. Если e_1, \dots, e_n — комплексный базис пространства V , то векторы $e_1, \dots, e_n, Ie_1, \dots, Ie_n$ образуют вещественный базис в пространстве V . Обратно, если векторы $e_1, \dots, e_n, Ie_1, \dots, Ie_n$ линейно независимы над полем \mathbb{R} , то векторы e_1, \dots, e_n линейно независимы над полем \mathbb{C} .

Кватернионная структура в пространстве V задается двумя линейными операторами I и J , причем должны выполняться условия $I^2 = J^2 = -1$, $IJ + JI = 0$. Можно считать, что $J: V \rightarrow V$ — это такое отображение комплексного пространства, которое удовлетворяет условию антикомплексной линейности:

$$J(\lambda x) = \bar{\lambda} J(x), \quad x \in V, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и $J^2 = -1$.

Адамс (Adams J.F.)

1. Vector fields on spheres. — Ann. Math., 1962, 75, p. 603 — 632. [Русский перевод: Адамс Дж.Ф. Векторные поля на сферах. — Математика (сб. переводов), 1963, 7, № 6, с. 48—79.]

2. On the groups $J(X)$, I. — Topology, 1963, 2, p. 181—195; II. — Topology, 1965, 3, p. 137 — 171; III. — Topology, 1965, 3, p. 193—222. [Русский перевод: Адамс Дж.Ф. О группах $J(X)$, I. — Математика (сб. переводов), 1966, 10, № 5, с. 70—84; II. — Математика (сб. переводов), 1967, 11, № 4, с. 42—69; III. — Математика (сб. переводов), 1968, 12, № 3, с. 3—97.]

Андерсон (Anderson D.W.)

1. The real K -theory of classifying spaces. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1964, 51, p. 634—636.

Атья (Atiyah M.F.)

1. Thom complexes. — Proc. London. Math. Soc. (3), 1961, 11, p. 291—310. [Русский перевод: Атья М.Ф. Пространства Тома. — Математика (сб. переводов), 1966, 10, № 5, с. 48—69.]

2. Global theory of elliptic operators. — Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo 1969). Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1970, p. 21—30.

3. Лекции по K -теории. — М.: Мир, 1967.

4. Vector bundles and the Kunneth formula. — Topology, 1963, 1, p. 245—248.

Атья и Ботт (Atiyah M.F., Bott R.)

1. On the periodicity theorem for complex vector bundles. — Acta Math., 1964, 112, p. 229—247.

Атья и Зингер (Atiyah M.F., Singer I.M.)

1. The index of elliptic operators on compact manifolds. — Bull. Amer. Math. Soc., 1963, 69, p. 422—433. [Русский перевод: Атья М.Ф. и Зингер И.М. Индекс эллиптических операторов на компактных многообразиях. — Математика (сб. переводов), 1966, 10, № 3.]

2. Индекс эллиптических операторов, I. — УМН, 1968, 23, № 5, с. 99—142; II. — УМН, 1968, 23, № 6, с. 135—149; III. — УМН, 1969, 24, № 1, с. 127—182.

Атья и Хирцеbruch (Atiyah M.F., Hirzebruch F.)

1. Vector bundles and homogeneous spaces in differential geometry. — Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 1961, 3, p. 7—38. [Русский перевод: Атья М.Ф. и Хирцеbruch Ф. Векторные пучки и однородные пространства в дифференциальной геометрии. — Математика (сб. переводов), 1962, 6, № 2, с. 3—39.]

Борель и Хирцеbruch (Borel A., Hirzebruch F.)

1. Characteristic classes and homogeneous spaces, I. — Amer. J. Math., 1958, 80, p. 458—538; II. — Amer. J. Math., 1959, 81, p. 315—382; III. — Amer. J. Math., 1960, 82, p. 491—504.

Ботт (Bott R.)

1. The stable homotopy of the classical groups. — Ann. Math., 1959, 70, p. 313—337.

2. Lectures on $K(X)$. — Cambridge (Mass): Harvard Univ., 1962. [Русский перевод: Ботт Р. Лекции о $K(X)$. — Математика (сб. переводов), 1967, 11, № 2, с. 32—57; 1967, 11, № 3, с. 3—36.]

Вуд (Wood R.)

1. Banach algebras and Bott periodicity. — Topology, 1966, 4, p. 371—389.

Годеман (Godement R.)

1. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.

Гротендик (Grothendieck A.)

1. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.

Каруби (Karoubi M.)

1. K -theory. — Berlin: Springer, 1978. [Русский перевод: Каруби М. K -теория. — М.: Мир, 1981.]

Каспаров Г.Г.

1. Обобщенный индекс эллиптических операторов. — Функц. анализ, 1973, 7, № 3, с. 82–83.

Квиллен (Quillen D.)

1. Cohomology of groups. — Actes Congres internat. Math., 1970, t. 2, p. 47–51.
2. The Adams conjecture. — Topology, 1971, 10, p. 67–80.

Кёйпер (Kuiper N.H.)

1. The homotopy type of the unitary group of Hilbert spaces. — Topology, 1965, 3, p. 19–30. [Русский перевод: Кёйпер Н.Х. Гомотопический тип унитарной группы гильбертовых пространств. — В кн.: Атья М.Ф. Лекции по K-теории. М.: Мир, 1967.]

Милнор (Milnor J.)

1. Construction of universal bundles, I. — Ann. Math., 1956, 63, p. 272 – 284; II. — Там же, p. 430–436.
2. The theory of characteristic classes. — Princeton (N. J.), 1957. [Русский перевод: Милнор Дж. Теория характеристических классов. — Математика (сб. переводов), 1959, 3, № 4, p. 3–53, 9, № 4, p. 3–40.]

Милнор и Стасеф (Milnor J., Stasheff J.D.)

1. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.

Мищенко А.С.

1. Бесконечномерные представления дискретных групп и гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. — УМН, 1973, 28, № 2, с. 239–240.
2. Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры. — ИАН СССР, сер. матем., 1974, 38, № 1, с. 81–106.
3. О фредгольмовых представлениях дискретных групп. — Функц. анализ, 1975, 9, № 2, с. 229–256.
4. Теория эллиптических операторов над C^* -алгебрами. — ДАН СССР, 1978, 239, № 6, с. 1289–1291.

Мищенко А.С. и Соловьев Ю.П.

1. Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха. — Матем. сб., 1980, 111, № 9, с. 209–226.

Новиков С.П.

1. О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях. — ИАН СССР, сер. матем., 1966, 30, № 1, с. 71–96.
2. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма, I. — ИАН СССР, сер. матем., 1970, 34, с. 253–288; II. — Там же, с. 475–500.

Пале (Palais R.)

1. Семинар по теореме Атья–Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.

Понтрягин Л.С.

1. Характеристические циклы дифференцируемых многообразий. — Матем. сб., 1947, 21, с. 233–284.
2. Классификация некоторых косых произведений. — ДАН СССР, 1945, 47, № 5, с. 327–330.

Пуппе (Puppe D.)

1. Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. — Math. Z., 1958, 69, S. 299–344.

Рохлин В.А.

1. Трехмерное многообразие — граница четырехмерного. — ДАН СССР, 1951, 81, № 3, с. 355–357.
2. Новые результаты в теории четырехмерных многообразий. — ДАН СССР, 1952, 84, с. 221–224.

Серр (Serre J.P.)

1. Homologie singulière des espaces fibres. — Ann. Math., 1951, 54, p. 425–505. [Русский перевод: Серр Ж.-П. Сингулярная гомология расслоенных пространств. — В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 9–114.]

Соловьев Ю.П.

1. Дискретные подгруппы, комплексы Брюа–Титса и гомотопическая инвариантность высших сигнатур. — УМН, 1976, 91, № 1, с. 261–262.

Спеньер (Spanier E.H.)

1. Algebraic Topology. — N.Y.; San Francisco; St. Louis; Toronto; London; Sydney: Mc Graw-Hill, 1966. [Русский перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.]

Стинрод (Steenrod N.F.)

1. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
2. Classification of sphere bundles. — Ann. Math., 1944, 45, p. 294–311.

Сулливан (Sullivan D.)

1. Геометрическая топология. — М.: Мир, 1975.

Уитни (Whitney H.)

1. Sphere spaces. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1935, **21**, p. 462–468.

2. On the theory of sphere bundles. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1940, **26**, p. 148–153.

Хирцебрух (Hirzebruch F.)

1. A Riemann–Roch theorem for differential manifolds. — Seminaire Bourbaki, 1959, **177**.

2. Topological Methods in Algebraic Geometry. — Berlin, 1966. [Русский перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1973.]

Хирш (Hirsch M.W.)

1. Immersions of manifolds. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, p. 242–276.

Хьюзмоллер (Husemoller D.)

1. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.

Чжень (Chern S.S.)

1. On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle. — Ann. Math., 1948, **49**, p. 362–372.

Ши Вэйшу (Shin Weishu)

1. Fiber cobordism and the index of elliptic differential operators. — Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 6, p. 984–991.

Штифель (Stiefel E.)

1. Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten. — Comm. Math. Helv., 1936, **8**, S. 3–51.

- Алгебра Калкина 187
 Атлас 8, 34
 База расслоения 7
 Векторное расслоение 19
 — — бесконечномерное 19
 — — вещественное 29
 — — комплексное 29
 — — конечномерное 19
 — — симплектическое 120
 — A -расслоение 185
 — G -расслоение 112
 — H -расслоение 114
 Геометрическая размерность 196
 Гипотеза Адамса 195
 Главное расслоение 14
 Гомоморфизм Ботта 98
 — расслоений 24
 Дифференциал отображения 38
 Замена структурной группы 14
 Индекс фредгольмова оператора 160
 Карта 8
 Касательное пространство 36
 — расслоение 11, 36
 Класс Тодда 151
 Классифицирующее пространство 52
 Компактный оператор 160
 Комплекс 202
 Комплексификация 29
 Комплексно сопряженное расслоение 30
 Комплексное расслоение 29
 Координатный гомеоморфизм 8, 34
 Локальная система координат 34
 Локально тривиальное расслоение 7
 Многообразие 34
 — Грассмана 50
 — Штифеля 50
 Модуль биградуированный 203
 — градуированный 203
 Надстройка 115
 Накрывающее отображение 53
 Нормальное расслоение 38
 Овеществление 29
 Ограничение расслоения 17
 Оператор Хирцебруха 176
 Операция Адамса 139
 — внешней степени 23
 Ориентированное расслоение 77
 Остов 51
 Относительное представление 194
 Периодичность Ботта 99
 Подрасслоение 31
 Послойная гомотопическая эквивалентность 195
 Препятствие 79
 — первое 79
 Принцип расщепления 137
 Проекция 7
 Прообраз расслоения 17
 Прямая сумма векторных расслоений 21
 Разностная конструкция 96
 Расслоение Хопфа 48
 Расслоенное пространство 7
 Род Тодда 152
 Сечение 16
 Скалярное произведение в расслоении 25
 Слой расслоения 7
 Соединение 63
 Сопряженное расслоение 23
 Структурная группа 12, 13
 Тензорное произведение 21
 Тотальное пространство расслоения 7
 Точная гомотопическая последовательность 53
 — последовательность 85
 Точный комплекс 92
 Универсальное главное расслоение 52
 Фредгольмов комплекс 165
 — оператор 160
 Фредгольмово представление 194
 Функция склейки (перехода) 8, 34
 Характер Черна 81
 Характеристический класс 66
 — — Понтрягина 77
 — — Чженя 74
 — — Штифеля—Уитни 77
 Эквивалентные расслоения 13
 Эквивалентное отображение 111
 Эллиптический комплекс 160
 — оператор 160

1-20

16 / 45-3
19

А. С. МИЛЦЕНКО

ВЪКСТОРОПНЬЕ ПАСОСЛОБИЯ
И ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ